

31^e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques

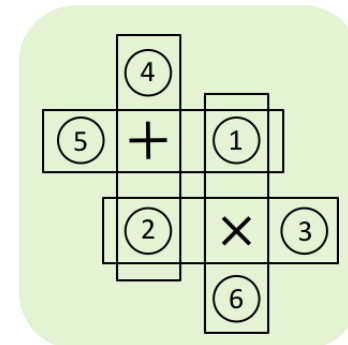
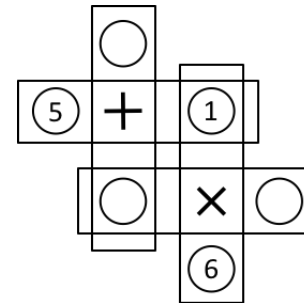
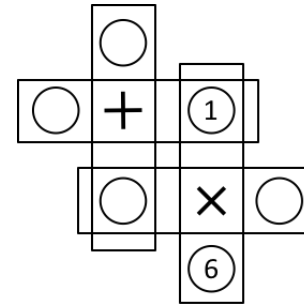


Finale Internationale des 30 et 31 août 2017

Diapo**RAMA** des solutions

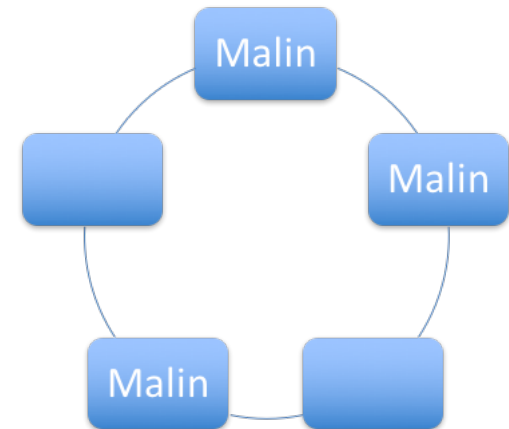
Jour 1 – Problème 1 – Quatre fois

- Pour que la 2^{ème} multiplication soit possible, le 1 doit être multiplié par le 6
- Le résultat est 6
- Le 1 est additionné avec le 5
- Le 2 est multiplié par le 3 et additionné avec le 4



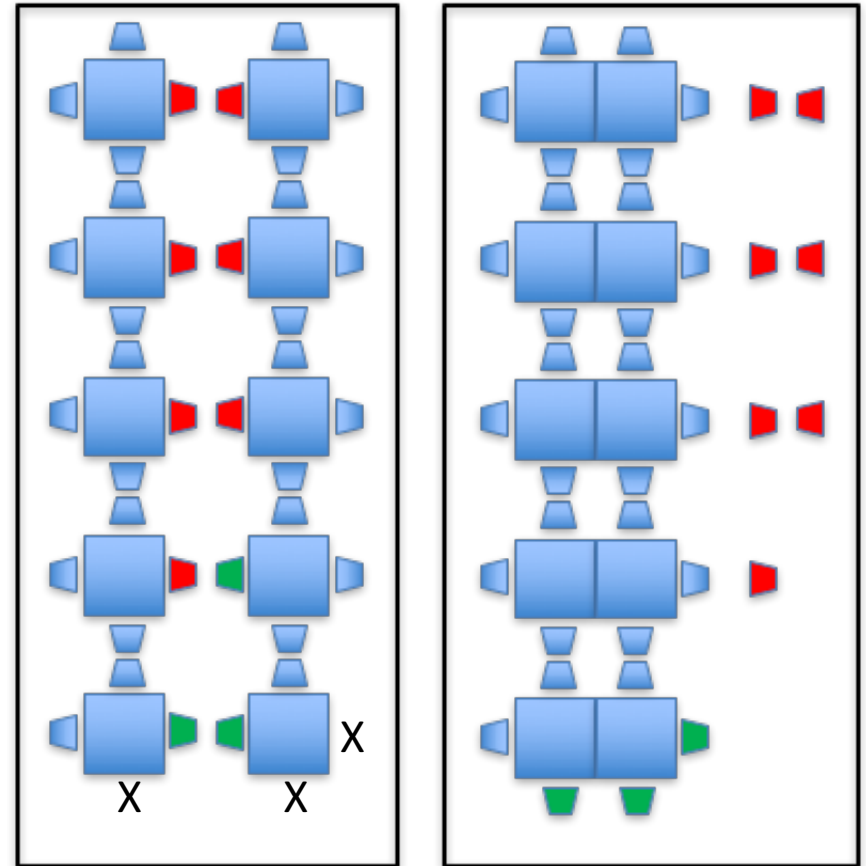
Jour 1 – Problème 2 – Les lapins malins

- Il n'y a pas de menteur entre 2 menteurs, sinon il dirait la vérité
- Il n'y a pas 3 menteurs à la suite
- Il n'y a pas 2 lapins disant la vérité à la suite, sinon ils mentiraient
- La réponse est **3** lapins malins



Jour 1 – Problème 3 – La pizzeria

- Chaque fois que Luigi groupe 2 tables carrées pour obtenir une table rectangulaire, il gagne 2 chaises
- Il récupère $5 \times 2 = 10$ chaises
- Comme il lui en manquait 3, il lui en reste $10 - 3 = 7$ en trop



Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

- Si la réponse à la question 3 est A, les réponses aux questions 1 et 2 sont C
- D'où une contradiction car la réponse à la question 2 est fausse
- La réponse à la question 3 ne peut pas être C donc elle est B

A est entouré

A/ 2 B/ 0 ~~C/ 1~~

fois dans le cadre

B est entouré

A/ 0 B/ 1 ~~C/ 2~~

fois dans le cadre

C est entouré

~~A/ 2~~ B/ 1 C/ 0

fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

- Si la réponse à la question 1 est C, la réponse à la question 2 est A
- D'où une contradiction car la réponse à la question 2 est fausse
- La réponse à la question 2 est C (entouré 1 fois selon question 3)

A est entouré

A/ 2 B/ 0 ~~C/ 1~~

fois dans le cadre

B est entouré

~~A/ 0~~ B/ 1 C/ 2

fois dans le cadre

C est entouré

A/ 2 ~~B/ 1~~ C/ 0

fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

- La réponse à la question 1 est B (entouré 2 fois selon question 2)

A est entouré

B est entouré

C est entouré

A/ 2	B/ 0	C/ 1
A/ 0	B/ 1	C/ 2
A/ 2	B/ 1	C/ 0

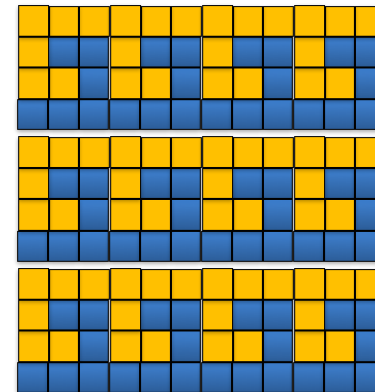
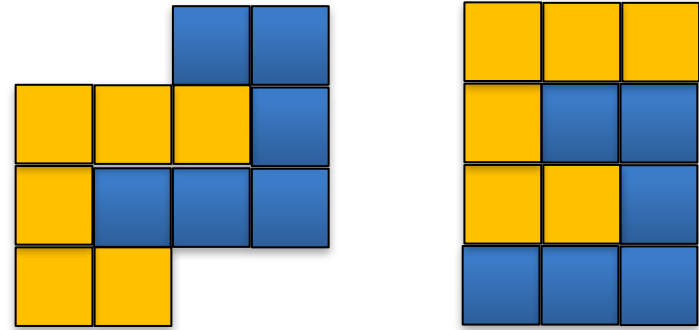
fois dans le cadre

fois dans le cadre

fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 5 – Le carré

- En bouchant le creux d'une pièce, il y a deux façons de placer une autre pièce, dont une seule permet de commencer un coin
- Le problème revient à faire un carré avec des rectangles 3 x 4
- Il en faut au moins 12
- La réponse est $12 \times 2 = 24$ pièces



Jour 1 – Problème 6 – La prochaine

- L'écart entre les deux années est un multiple de 2, 3 et 4 donc d'au moins 12
- La prochaine année ayant les trois propriétés est $2017 + 12 = 2029$
- *On vérifie que $2029 + 1 = 2030$ est divisible par 2,
 $2029 + 2 = 2031$ par 3 (somme des chiffres 6 divisible par 3)
et $2029 + 3 = 2032$ par 4 (32 divisible par 4)*

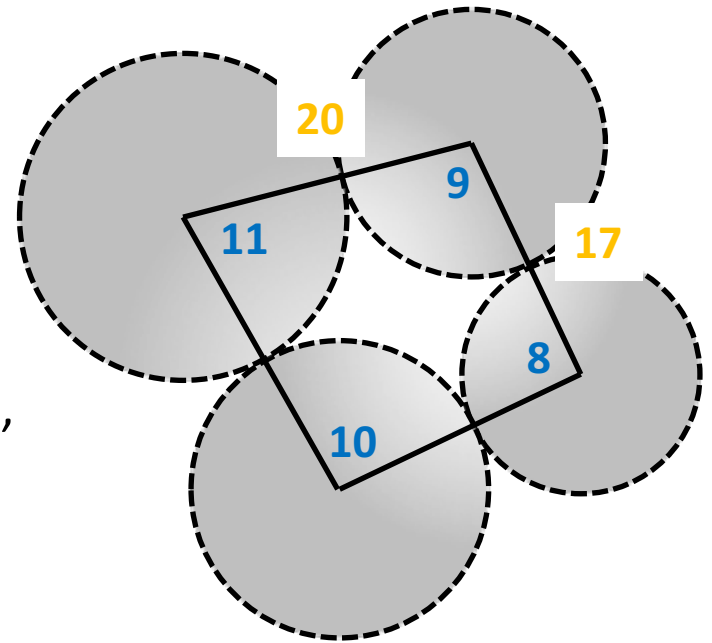
Jour 1 – Problème 7 – La balance

- On ajoute F F M sur chaque plateau de l'équilibre en haut
- On remplace F F J M par 35
- $20 + 35 = 17 + (2 \times (F M))$
- $20 + 35 - 17 = 2 \times (F M)$
- $38 = 2 \times (F M)$
- D'où la réponse **19** grammes



Jour 1 – Problème 8 – Le drone

- 20 n'est pas la somme de deux rayons au moins 12 et au plus 8, sinon il y aurait au moins 5 entiers consécutifs
- Ni de deux rayons 10
- 20 est la somme des deux rayons 11 et 9
- Au sommet commun, le rayon n'est pas 11, sinon il y aurait au moins 6 entiers consécutifs (de $17 - 11 = 6$ à 11)
- La réponse est **9** cm



Jour 1 – Problème 9 – Devine âge

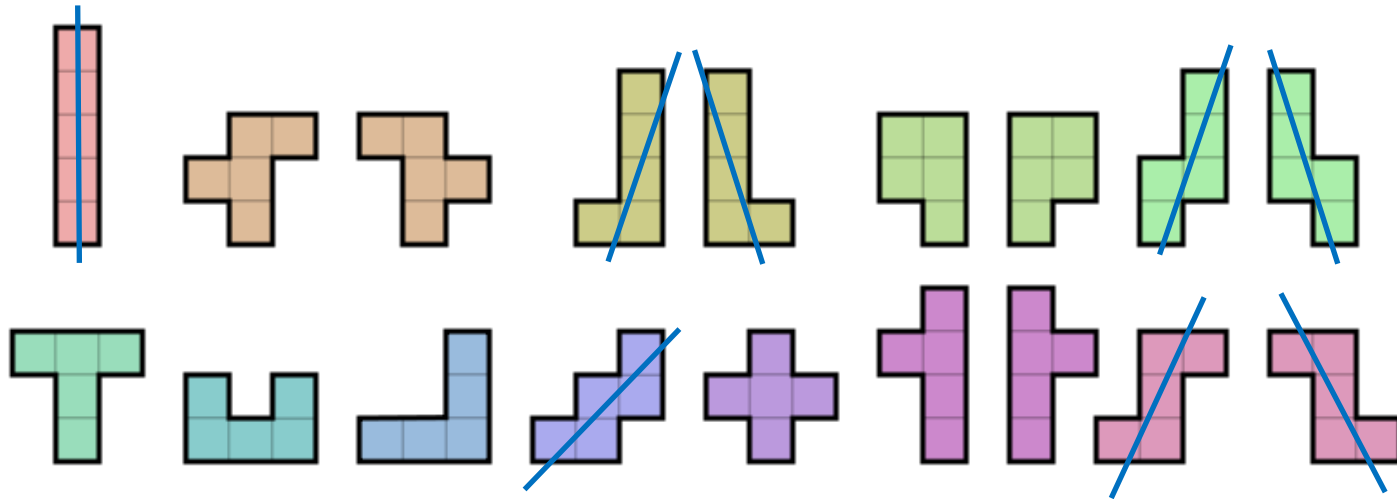
- L'âge est de la forme ab^2 (a sans diviseur autre que 1 et lui, b idem)
- Les 6 diviseurs sont 1, a, b, ab, b^2 et ab^2
- Comme a et b divisent 72, ce sont 2 et 3

- **Si** $a = 2$ et $b = 3$, les 6 diviseurs sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18
- Comme 72 est divisible par 8, 3 des 4 diviseurs sont 2, 6 et 18, mais leur produit est déjà plus grand que 72

- $a = 3$ et $b = 2$, l'âge d'Agathe est $3 \times 2^2 = \mathbf{12}$ ans
- *Les 6 diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12*
- *Le produit 72 est obtenu avec 1, 2, 3 et 12 ou 1, 3, 4 et 6*

Jour 1 – Problème 10 – Les pentaminos linéaires

- On compte **8** pentaminos linéaires, « barrés » ci-après



Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- La somme des 9 chiffres utilisés a le même reste dans la division par 9 que 2017, 1
- La somme des entiers de 0 à 9 étant 45, divisible par 9, le chiffre 8 n'est pas utilisé
- **Si** la retenue des unités est 1 et celle des dizaines est r , la somme des 9 chiffres est $(20 - r) + 10r + 17 = 37 + 9r$
- $r = 0$, ce qui est impossible (dizaines)
- La retenue des unités est 0

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad (r) \quad (1) \\
 \begin{array}{ccc}
 ? & ? & ? \\
 ? & ? & ? \\
 ? & ? & ? \\
 2 & 0 & 1 & 7
 \end{array}
 \end{array}$$

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- La somme des 9 chiffres est
 $(20 - r) + (10r + 1) + 7 = 28 + 9r, r = 1$
- **Si** le 19 de la colonne des centaines est obtenu avec 9, 6 et 4, le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 5, 2 et 0
- Un seul nombre divisible par 11 est possible, 935
- Le 19 de la colonne des centaines est obtenu avec 9, 7 et 3 (pas de 8)

(2) (r) (0)

? ? ?
 ? ? ?
 ? ? ?

2 0 1 7

(2) (1) (0)

9 7 5
 6 3 2
 4 1 0

2 0 1 7

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- **Si** le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 5, 2 et 0
- Un seul nombre divisible par 11 est possible, 715

	(2)	(1)	(0)
	9	6	5
	7	4	2
	3	1	0
	2	0	1
			7

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- Si le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 4, 2 et 1, les nombres divisibles par 11 possibles sont 902, 704 et 352
- D'où la 1^{ère} réponse, **961** (avec 704 et 352)

	(2)	(1)	(0)
	9	6	4
	7	5	2
	3	0	1
2	0	1	7

- Si le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 6, 1 et 0, les nombres divisibles par 11 possibles sont 946, 726 et 341
- D'où la 2^{ème} réponse, **950** (avec 726 et 341)

	(2)	(1)	(0)
	9	5	6
	7	4	1
	3	2	0
2	0	1	7

Jour 1 – Problème 12 – Les briques

- Raisonons sur la parité du nombre de briques d'une pile
- Thomas est parti de 27, impair
- Il n'a jamais assemblé deux nombres impairs
- Les quatre nombres autres que 7 sont tous pairs
- Ce sont forcément 2, 4, 6 et 8
- La réponse est **8**

Assemble		Paires	Impaires
Pair	Pair	- 1	=
Pair	Impair	- 1	=
Impair	Impair	+ 1	- 2

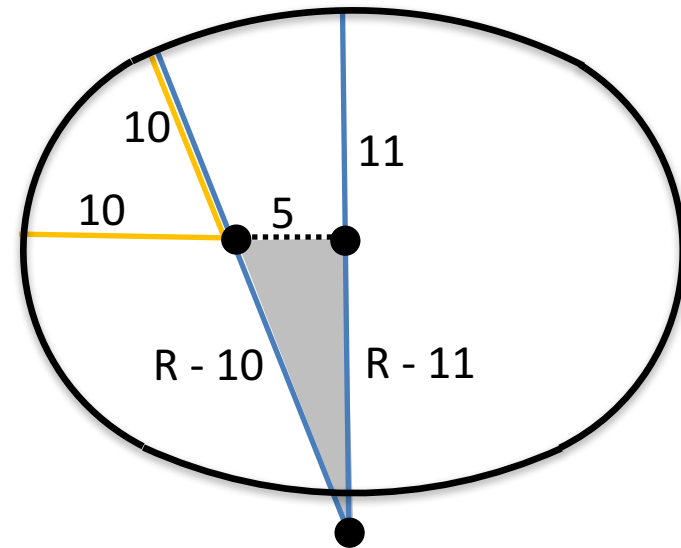
Scinde	Paires	Impaires
Pair	+ 1	=
Impair	+ 1	=

- *Vérifions la possibilité :*

27 → 9 18 → 6 9 12 → 4 6 8 9 → 3 4 6 6 8 → 2 3 4 4 6 8 → 2 4 6 7 8

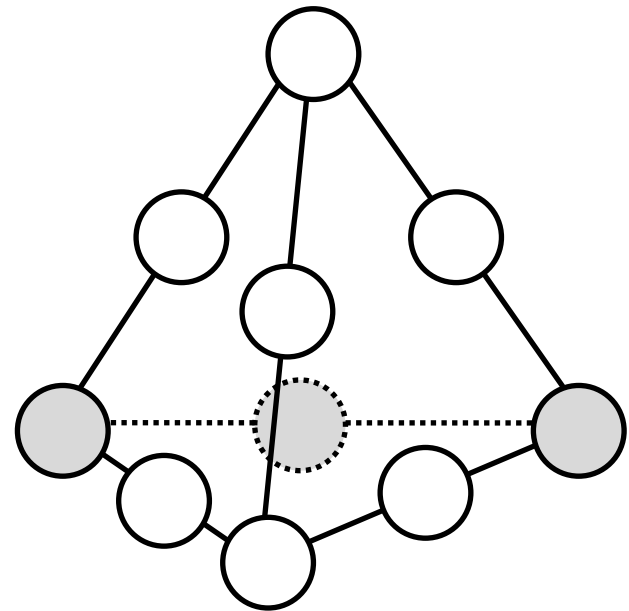
Jour 1 – Problème 13 – Le ballon de rugby

- On applique Pythagore dans le triangle rectangle dont les sommets sont les centres de l'ovale, d'un grand et d'un petit arcs de cercle
- $(R - 11)^2 + 5^2 = (R - 10)^2$
- $5^2 = (R - 10) + (R - 11) = 2R - 21$
- La réponse est **23** cm



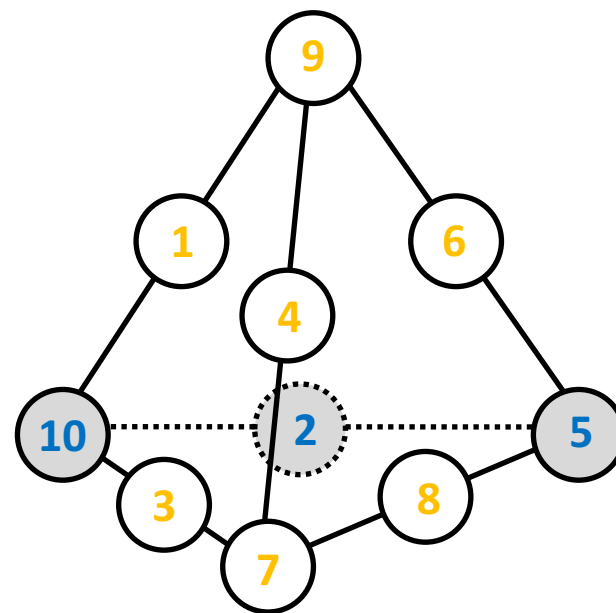
Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

- Soient S la somme des 4 sommets et M celle des 6 milieux d'arête
- $S + M$ est la somme des entiers de 1 à 10, 55
- $3S + M$ est la somme des arêtes, $(5 \times 20) + (1 \times 17) = 117$
- $S = 31$ et $M = 24$
- Les sommets sont 10 8 7 6, 10 9 7 5 ou 10 9 8 4



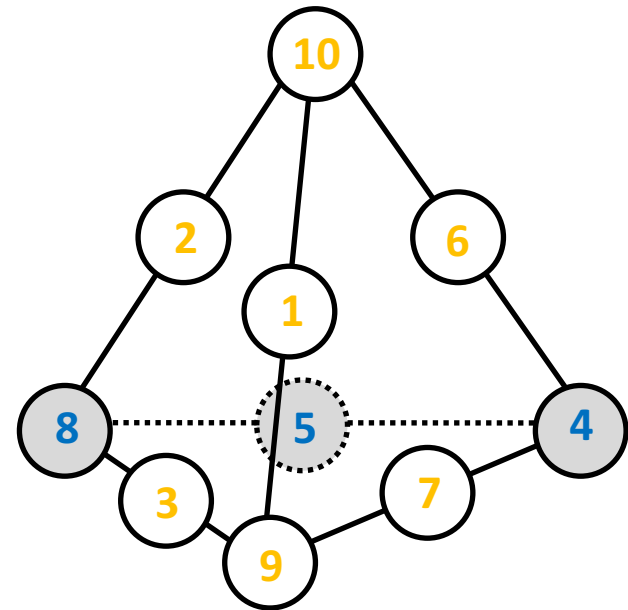
Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

- **Si** les sommets sont 10 8 7 6, 7 et 6 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 7)
- Ils sont complétés par 4, que l'on trouve aussi entre 10 et 6
- Si les sommets sont 10 9 7 5, 10 et 5 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 5)
- Ils sont complétés par 2, d'où une 1^{ère} réponse, **100**, car on peut terminer



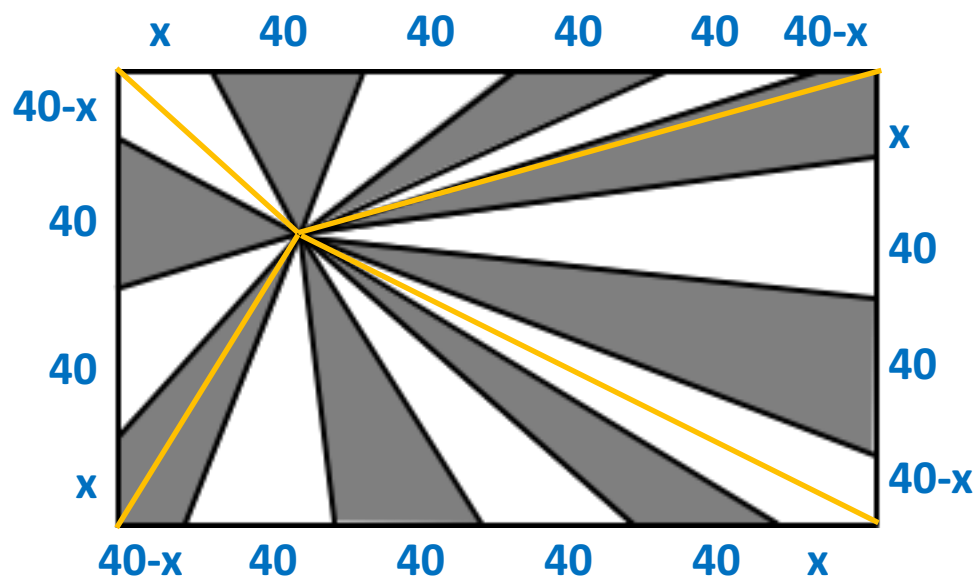
Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

- Si les sommets sont 10 9 8 4, 8 et 4 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 8)
- Ils sont complétés par 5, d'où la 2^{ème} réponse, **160**, car on peut terminer



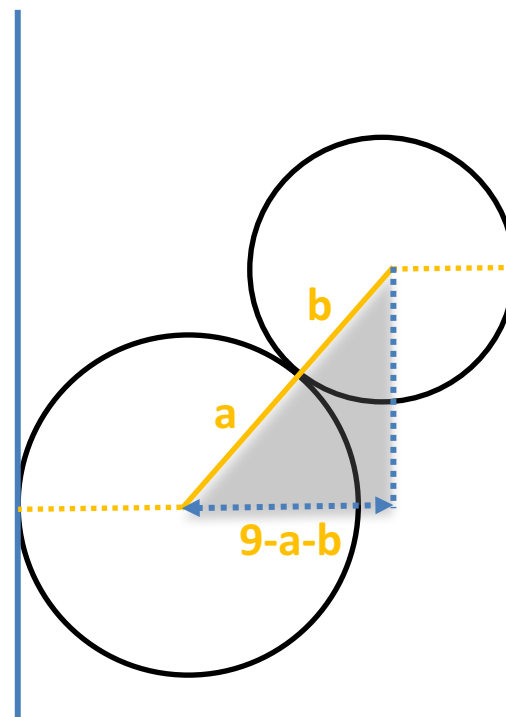
Jour 1 – Problème 15 – Le drapeau

- Le total des aires grises des deux grands triangles basés sur les longueurs est $120(120-x)/2$
- Celui des deux grands triangles basés sur les largeurs est $200(40+x)/2$
- Leur somme est $40x + 11200$
- Le total des aires blanches est $24000 - (40x + 11200)$
- $2(40x + 11200) - 24000 = 240$
donne la réponse $x = \mathbf{23}$ cm



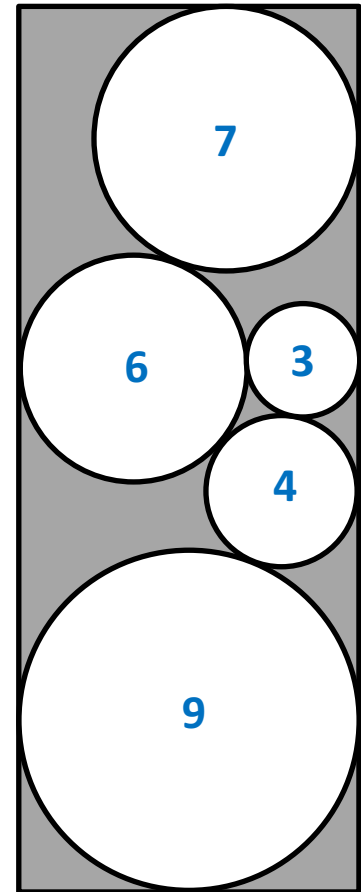
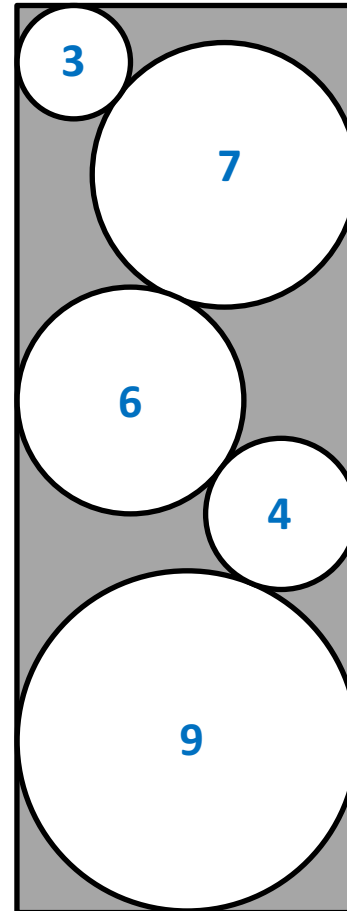
Jour 1 – Problème 16 – Les boules de Noël

- Pour les deux boules en contact avec le fond ou le couvercle, les hauteurs sont deux « demi » entiers
- Lorsque deux boules sont en contact, la hauteur est (Pythagore)
 $\sqrt{(a+b)^2 - (9-a-b)^2} = 3\sqrt{2a+2b-9}$
- La (boule de diamètre) 9 est en contact avec la seule 4 (sinon, on introduirait $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ou $\sqrt{7}$)
- Puis la 4 avec la 6 (sinon, on introduirait $\sqrt{2}$)
- Et enfin la 6 avec la 7



Jour 1 – Problème 16 – Les boules de Noël

- La 3 peut être placée à deux endroits
- $4,5 + 6 + 3 + 6 + 3 + 1,5 = 24$
- $4,5 + 6 + 3 + 6 + 3,5 = 23$
- La hauteur de la boîte est **23** ou **24** cm

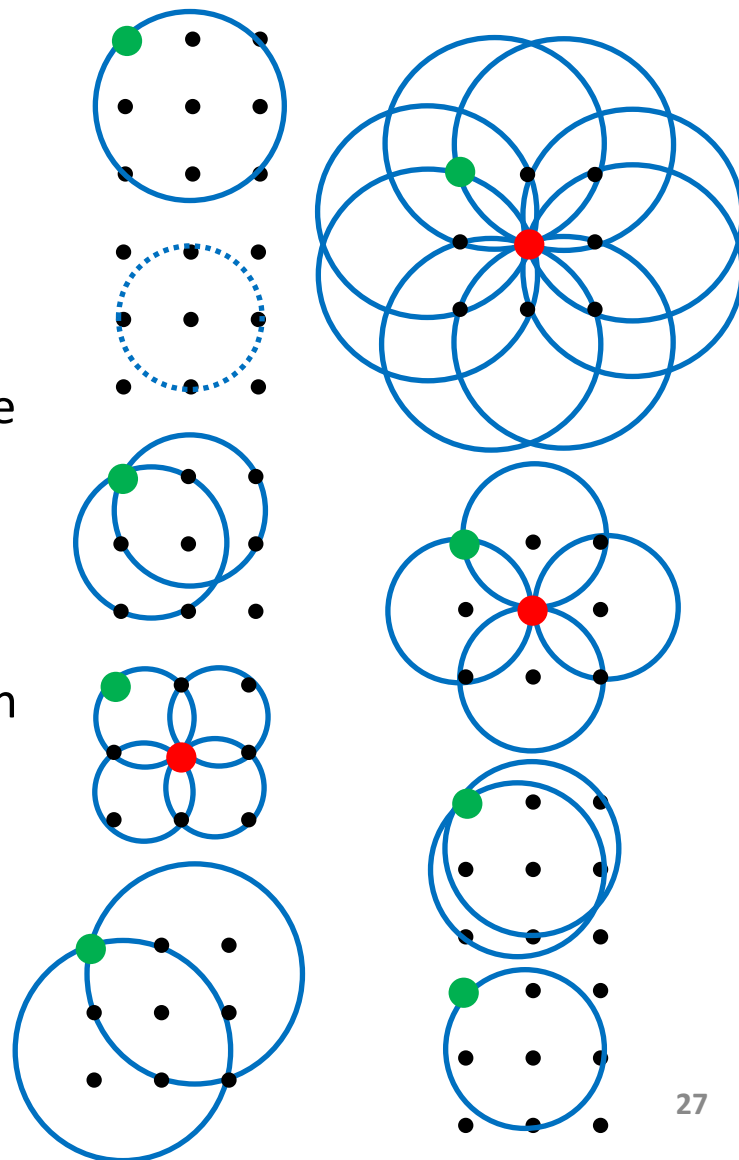


Jour 1 – Problème 17 – L'anniversaire du Mage Hic

- Les nombres obtenus sont les $n^2 + n + 41$ à partir de $n = 1$
- Jusqu'à $n = 39$ compris, on n'obtient que des nombres premiers :
43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281,
313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853,
911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601
- Pour $n = 40$, on obtient 41^2
- Le nombre de spectateurs est au maximum **39**
- *Arithmétique* : $(2N + 1)^2 + 163 = (2P)^2$, $81^2 + 163 = 82^2$,
la factorisation de l'anneau des entiers $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ est unique

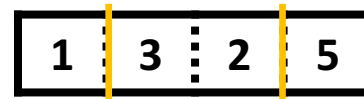
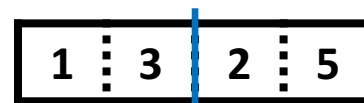
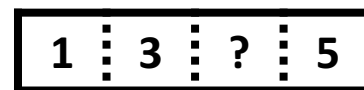
Jour 1 – Problème 18 – Les points et les cercles

- Il y a deux façons d'associer deux cercles passant par 4 points
- Elles laissent ou le centre ou un coin libre
- Le nombre de cercles passant par le centre est $4 + 8 + 4 = 16$
- Le nombre de cercles passant par un coin est $1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$
- La réponse est **13** ou **16** cercles



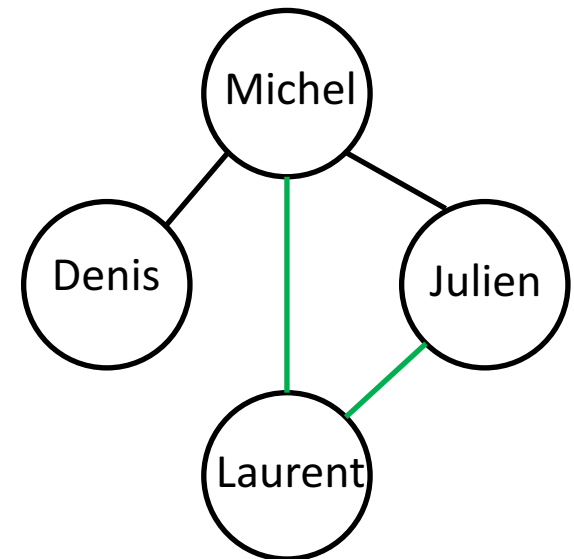
Jour 2 – Problème 1 – Les deux bandes de papier

- Dina ne peut pas obtenir plus de 100
- Ugo coupe au milieu et obtient $13 + ?5$
- Le résultat d'Ugo se termine par 8
- Dina coupe tout à droite (sinon $1 + 3 + 5 = 9$)
- Elle ne coupe pas au milieu, sinon $? = 0$ et 05 n'est pas un nombre
- La réponse est $8 - 1 - 5 = 2$
- *On vérifie que $13 + 25 = 38 = 1 + 32 + 5$*



Jour 2 – Problème 2 – Le tournoi

- Michel a joué avec les trois autres, dont Denis
- Julien, qui n'a pas joué avec Denis, a joué avec Michel et Laurent
- Laurent a joué avec Michel et Julien
- La réponse est **2**



Jour 2 – Problème 3 – La grille double

- On place le **A** sur les 2^{ème} puis 3^{ème} ligne
- On place le **C** dans la 2^{ème} colonne puis le **B** sur la 1^{ère} ligne
- On place le **C** sur la 2^{ème} ligne
- On termine la 3^{ème} ligne

A 1	2	
	B	A
	A	

A 1	C 2	B
C	B	A
B	A	C

Jour 2 – Problème 3 – La grille double

- On place le 3 sur la 1^{ère} ligne
- A est déjà avec 1 dans une case et ne peut pas être avec 3 dans la 3^{ème} colonne
- On termine la grille
- *On observe que la règle donnée pour A est aussi vérifiée par B et par C*

A 1	C 2	B 3
C	B	A 2
B	A 3	C

A 1	C 2	B 3
C 3	B 1	A 2
B 2	A 3	C 1

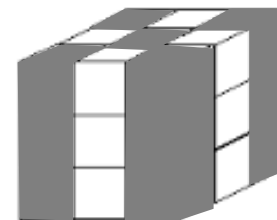
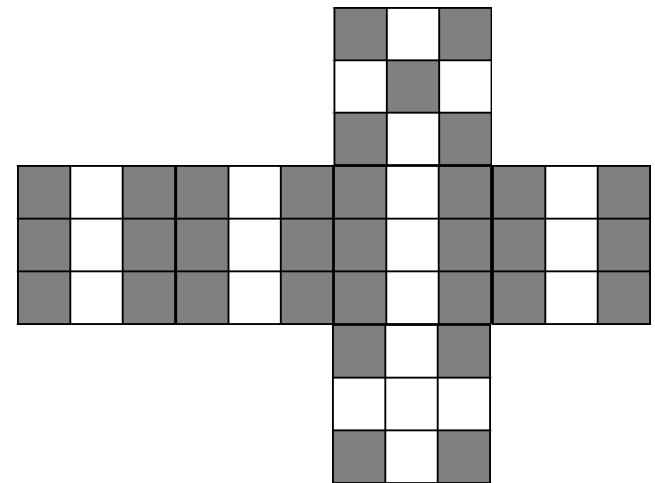
Jour 2 – Problème 4 – Le train

- Numérotons 1, 2 et 3 les voitures à partir d'une extrémité du train
- Un passager de la voiture 1 a 5 voisins,
sinon un passager de la voiture 2 en aurait plus de 10
- Un passager de la voiture 2 a 5 voisins dans les voitures 1 et 2,
plus 5 dans la voiture 3
- Un passager dans la voiture au milieu du train a 10 voisins, il est seul
- La réponse est $6 + 5 + 1 + 5 + 6 = \mathbf{23}$ passagers
- *On peut vérifier en terminant à partir du milieu*

Passagers	1	5	5	1	5	5	1
Voisins	5	10	10	10	10	10	5

Jour 2 – Problème 5 – Le cube

- La face avec 6 cases grises fait le tour du grand cube (arêtes verticales), donnant $4 \times 3 = 12$ petits cubes gris
- Les faces avec 4 et 5 cases grises sont les deux faces restantes du grand cube
- Elles montrent 1 petit cube gris de plus
- Comme le petit cube au centre du grand cube est blanc, la réponse est $12 + 1 = \mathbf{13}$ petits cubes gris



Jour 2 – Problème 6 – Devine somme

- Le produit des deux plus petits est $256 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$
- Le deuxième plus petit est au moins 32 (et le premier au plus 8)
- $1056 = 32 \times 33$
- 32 est aussi le premier des deux plus grands
- En fait, on ne compte que trois nombres différents
- $8 + 32 + 33 = \mathbf{73}$

Jour 2 – Problème 7 – Le jardin d'enfants

- **Si** Baya ne travaille pas le jour où Abby ne travaille pas, leurs 3 jours communs sont ceux où Baya travaille avec chacune des 3 autres
- Mais alors Abby ne pourrait pas travailler 3 jours avec Dara

- **Si** Dara travaille 2 jours avec Abby et Baya, elle doit travailler un quatrième jour et (au moins) un jour avec Cary et Effy
- Mais alors Baya ne le pourrait pas

A	A	A	A	
B	B	B		
C	D	E		

A	A	A	A	B
B	B	D		D
D	D	CE		EC

Jour 2 – Problème 7 – Le jardin d'enfants

- Cary doit travailler (au moins) un jour avec Effy
- Dary doit travailler (au moins) un jour avec Cary et Effy
- Carry travaille un seul jour avec Abby
- La réponse est **3**

A	A	A	A	B
B	B	D	D	C
D				E

A	A	A	A	B
B	B	D	D	C
D	E	C	E	E

Jour 2 – Problème 8 – La suite de l'année

- Après la 9^{ème} étape, 19 donne à nouveau 37
- Tout se répète selon la période 6
- $2017 = 7 + (6 \times 335)$
- La réponse est **34**

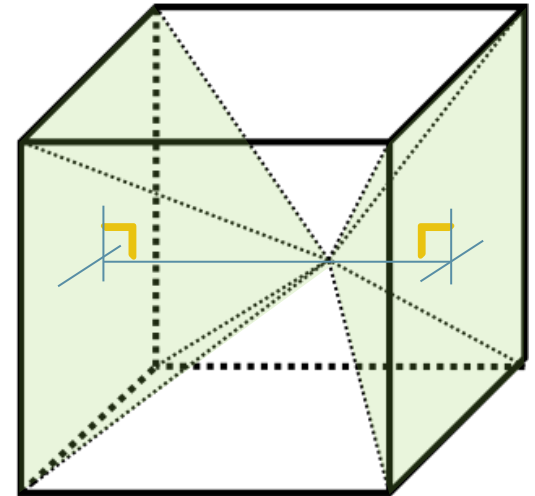
		Etapas		
2017	1			
229	2			
97	3	9	15	
37	4	10	16	
31	5	11	17	
7	6	12	18	...
28	7	13	19	2017
34	8	14	...	
19				

Jour 2 – Problème 9 – Pauvres souris

- Soient S le nombre de souris attrapées le premier jour et N le nombre de jours
- **Si** N est pair, le nombre total de souris ne peut pas être 55, impair
- **Si** $N = 3$, $S + (S + 2) + (S + 4) = 3S + 6$ ne peut pas être 55, non divisible par 3
- $N = 5$
- $S + (S + 2) + (S + 4) + (S + 6) + (S + 8) = 5S + 20 = 55$ donne $S = 7$
- *Si $N = 7$, $S + \dots + (S + 12) = 5S + 20 + 10 + 12 = 5S + 42$ ne peut pas être 55*
- *Dès $N = 9$, le nombre total de souris dépasserait $42 + 14 + 16 = 72$*

Jour 2 – Problème 10 – Devine cube

- Les volumes sont proportionnels aux distances du point à la face du cube (base de la pyramide)
- Deux à deux, elles totalisent un côté du cube
- Si 20 et 17 sont additionnées, il ne peut pas y avoir de 3^{ème} valeur ($20 + 17 = 37$ est impair)
- Soit 20 est doublé et 17 est complétée avec 23
- Soit 17 est doublé et 20 est complétée avec 14
- La réponse est $3 \times 40 = \mathbf{120}$ ou $3 \times 34 = \mathbf{102}$ cm³



Jour 2 – Problème 11 – La piscine

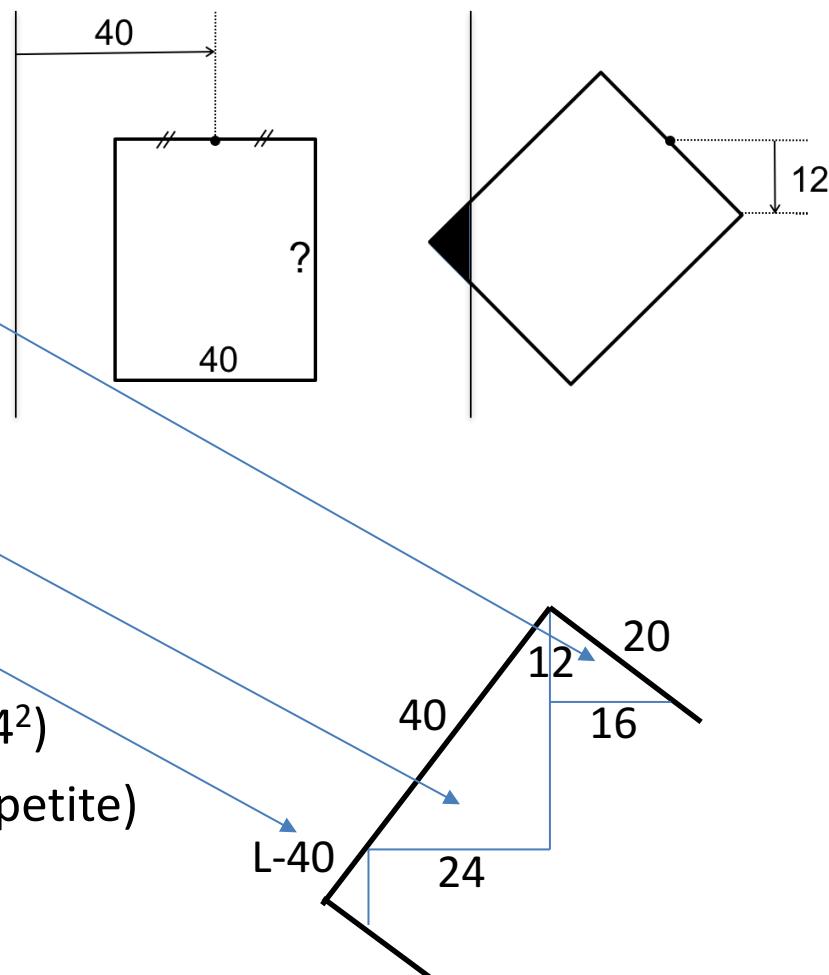
- Hier, soit D la distance totale en km
- $(D/2)/2 + (D/2)/3 = 1$ donne $D = 12/5$ km
- Aujourd'hui, Ariel parcourt $2/2 + 3/2 = 5/2$ km
- $5/2 - 12/5 = 1/10$ km = 100 m = 2 x 50 m
- La réponse est **2**

Jour 2 – Problème 12 – Le mot le plus long

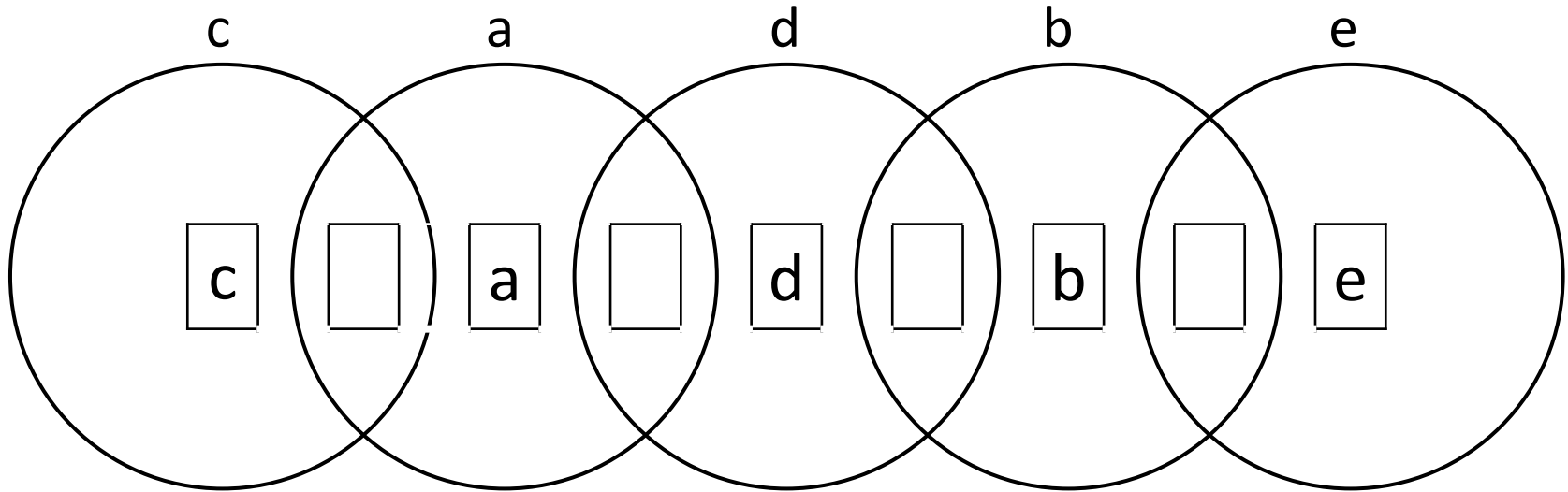
- On compte 3 mots d'une lettre possibles (F, J et M), 4 mots de 2 lettres possibles (FF, FJ, JM et MF), 4 mots de 3 lettres possibles (FFJ, FJM, JMF et MFF), 4 mots de 4 lettres possibles (FFJM, FJMF, JMFF et MFFJ)
- Ces 15 mots totalisent 39 lettres, dont 19 F
- Le mot le plus long a 5 lettres
et un mot de 4 lettres, dont 2 F, n'est pas formé
- Le mot le plus long doit contenir $(10 \times 2) - (19 - 2) = 3$ F
- La réponse est **FFJMF** ou **FJMFF**

Jour 2 – Problème 13 – Le cadre

- $20 = 40/2$, $16 = \sqrt{(20^2 - 12^2)}$
- Les triangles rectangles sont proportionnels au 3 4 5 d'aire 6
- $24 = 40$ (rideau-clou) – 16
- $40 = (5/3) \times 24$
- $((L - 40)/4)^2 \times 6 = (40L)/80$ (aires)
- $3L^2 - 244L + 4800 = 0$ (discriminant 44^2)
- $(244 + 44) / 6 = 48$ (autre racine trop petite)
- La réponse est **48** cm

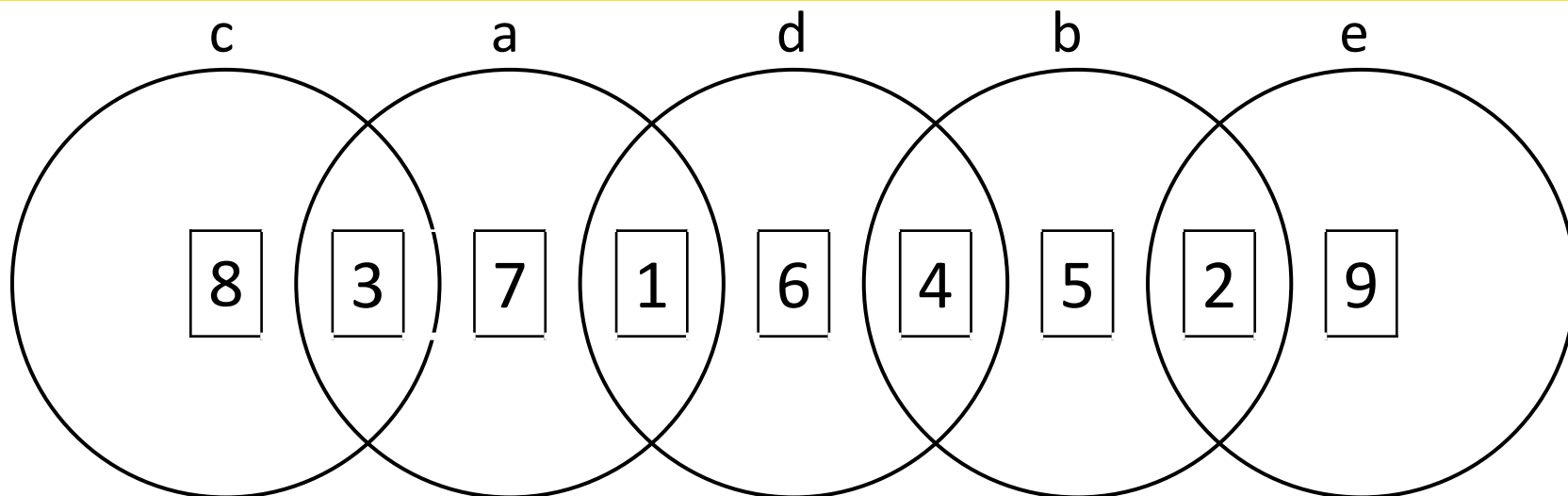


Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



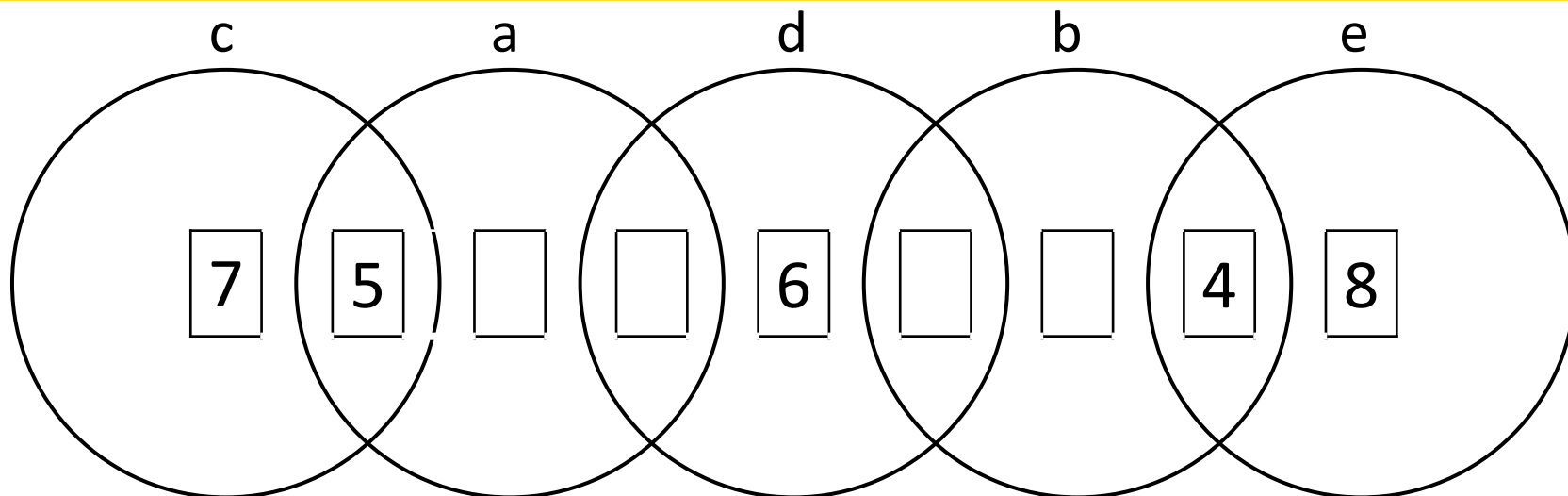
- Soit S la somme constante
- La somme des entiers de 1 à 9 est 45
- $3S + a + b = 45$ donc $S \leq 14$
- $2S + c + d + e = 45$ donc $S \geq 11$

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



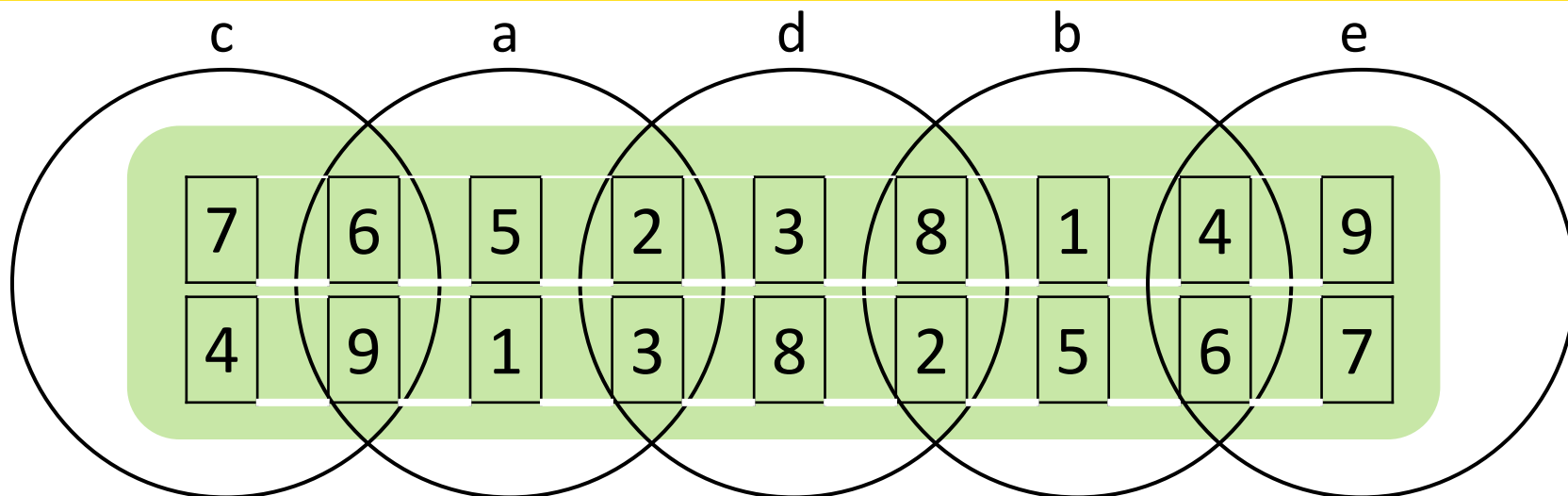
- **Si** $S = 11$, $c + d + e = 23$ donc c, d, e sont 6, 8, 9
- $d \neq 9$ car il ne pourrait pas être complété à 11, $e = 9$ avec 2
- $d \neq 8$ car il ne pourrait pas être complété à 11, $d = 6$ et $c = 8$ avec 3
- 7 n'est pas avec 2 ni 6, $a = 7$ et $b = 12 - a = 5$
- On termine par 1 et 4
- Mais le nombre n'est pas divisible par 13

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



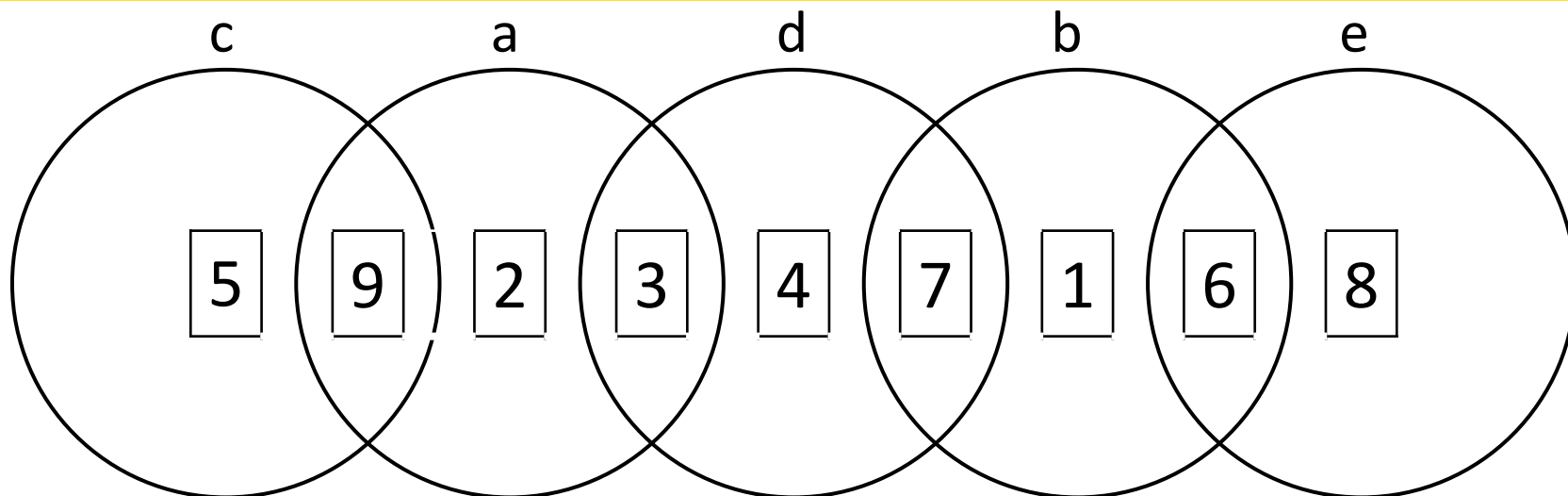
- **Si** $S = 12$, $c + d + e = 21$ donc c, d, e sont 4, 8, 9 ou 5, 7, 9 ou 6, 7, 8
- Le 1^{er} cas est écarté car ni 4 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Le 2^{ème} cas est écarté car ni 5 ni 7 ne peuvent être à une extrémité
- $d = 6$ qui ne peut pas être à une extrémité, $c = 7$ avec 5 et $e = 8$ avec 4
- 9 ne peut pas être placé

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



- Si $S = 13$, $c + d + e = 19$ et $a + b = 6$ donc a, b sont 1, 5 ou 2, 4
- Si c, d, e est 2, 8, 9, ni 2 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 3, 7, 9, $d = 3$, $a \neq 1$... on obtient une **première réponse**
- Si c, d, e est 4, 6, 9, ni 4 ni 9 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 4, 7, 8, $d = 8$... on obtient la **seconde réponse**
- Si c, d, e est 5, 6, 8, ni 5 ni 8 ne peuvent être à une extrémité

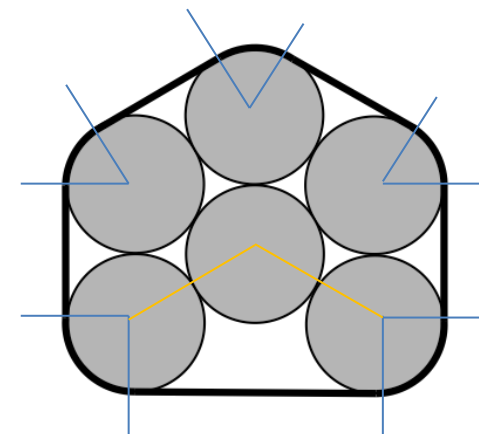
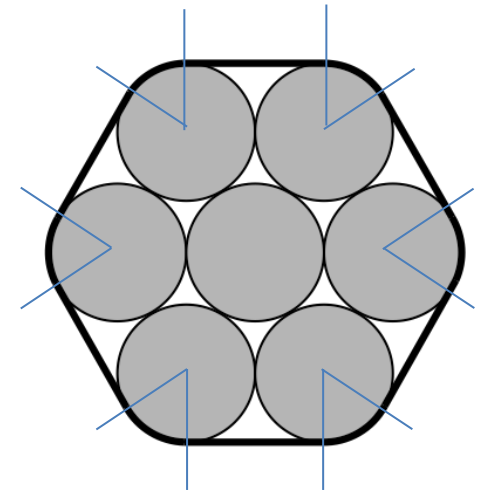
Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encadrés



- **Si** $S = 14$, $c + d + e = 17$ et $a + b = 3$ donc a, b sont 1, 2
- Si c, d, e est 3, 5, 9, ni 5 ni 9 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 3, 6, 8, ni 6 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 4, 5, 8, $d = 4$, $a \neq 1$... mais le nombre n'est pas divisible par 13
- Si c, d, e est 4, 6, 7, ni 4 ni 7 ne peuvent être à une extrémité

Jour 2 – Problème 15 – Les tuyaux

- Soient R le rayon d'un tuyau en mm et d la diminution cherchée
- $12R + 2\pi R = 914$
- $8R + (2\sqrt{3})R + 2\pi R = 914 - d$
- $d = (2 - \sqrt{3}) \times 914 / (6 + \pi) \cong 0,27 \times 100 = 27$
- La réponse est **27** mm
- *Le tour de ruban ne baisse que d'environ 3 %*



Jour 2 – Problème 16 – En fractions unitaires

- On cherche $a < b$ tel que $(1/a) + (1/b) = (4/2017) - (1/7120010)$
- $2 \times 5 \times 353 (a + b) = 7 a b$ [1]
- Si a et b sont divisibles par 353, $a = 353 a'$ et $b = 353 b'$ (avec $a' < b'$)
- [1] devient $2 \times 5 (a' + b') = 7 a' b'$
- $2 - a' = 4(b' - 5)/(25 + 7(b' - 5))$ vaut $-3, -8/11, -2/9, 0$ puis tend vers $4/7$
- $b' = 5$ et $a' = 2$, d'où une première réponse $353 \times 2 = 706$
- $4/2017 - 1/7120010 = 14119/7120010 = 7/(2 \times 5 \times 353) = (5+2)/(2 \times 5 \times 353)$
 $= 1/(2 \times 353) + 1/(5 \times 353) = 1/706 + 1/1765$

Jour 2 – Problème 16 – En fractions unitaires

- **Si** seul a est divisible par 353, $a = 353a'$
- **[1]** devient $2 \times 5 (353a' + b) = 7 a' b$ qui donne $a' = 304 + 353a''$
- $2 \times 5 (304 + 353a'') = (7a'' + 6)b$
- D'où une contradiction car $b \geq 2^2 \times 5 \times 353 / 7 > 1008$
- Si seul b est divisible par 353, **[1]** devient $(7b'' + 6)a = 10(304 + 353b'')$
- $505 - a = 5(b'' - 2) / (20 + 7(b'' - 2))$ vaut $-5/3, -5/13, 0$ puis tend vers $5/7$
- $b'' = 2$ et $a = 505$, d'où la seconde réponse **505**
- $4/2017 - 1/7120010 = 14119/7120010 = 7/(2 \times 5 \times 353) = 707/(2 \times 5 \times 101 \times 353)$
 $= (706+1)/(2 \times 5 \times 101 \times 353) = 1/(5 \times 101) + 1/(2 \times 5 \times 101 \times 353) = 1/505 + 1/356530$

Jour 2 – Problème 17 – Les hauteurs du triangle

- Soient a et b les côtés du triangle correspondant aux hauteurs 20 et 17, c le troisième côté, h la troisième hauteur
- L'aire du triangle est la moitié de $20a = 17b = ch$
- Les inégalités triangulaires donnent $b - a \leq c \leq a + b$
- $(20 - 17)ch \leq (17 \times 20)c \leq (17 + 20)ch$
- $9,18 \leq h \leq 113,34$
- La réponse est $113 - 9 = \mathbf{104}$

Jour 2 – Problème 18 – De la suite dans les idées

- Soient M le nombre du Mage Hic, S et P les nombres de Serge et de Pierre
- $123456789 = P^2 M (M + S^2)$ [1]
- Si $P \geq 12$, alors $M^2 < 10^6$, d'où une contradiction (M a 4 chiffres)
- **P = 3** (test des diviseurs premiers jusqu'à 11) ou **P = 1**
- Si **P = 3**, M est impair et $S = 2 + 4s$
- [1] devient $M^2 + (4 \times (1 + 2s)^2) M - 13717421 = 0$
- On étudie le quart du discriminant, soit $(4 \times (1 + 2s)^4) + 13717421$
- Si $s = 0$ ($S = 2$), 1 ($S = 6$) et 2 ($S = 10$), alors 13717425, 13717745 et 13719921 ne sont pas des carrés
- Si $s = 3$ ($S = 14$), $13727025 = 3705^2$, $M = -(2 \times 7^2) + 3705 = \mathbf{3607}$

Jour 2 – Problème 18 – De la suite dans les idées

- Toujours si $P = 3$, $3607 + 14^2 = 3803$
- $[1]$ devient $M \{ M + (4 \times (1 + 2s)^2) \} = 3607 \times 3803$
- $M \neq 1$ car $(13717421 - 1) / 4 = 9670645$ n'est pas un carré
- 3607 et 3803 sont premiers (test des diviseurs premiers jusqu'à 61)
- Il n'y a pas d'autre réponse

- Si $P = 1$, $[1]$ devient $M (M + S^2) = 3^2 \times 3607 \times 3803$
- Mais pour $M = 1, 3, 3^2 = 9, 3607, 3803$ ou 3×3607 (les 6 cas à étudier), S^2 se terminerait respectivement par 8, 60, 2, 20, 60 et 8

- **La réponse est unique**