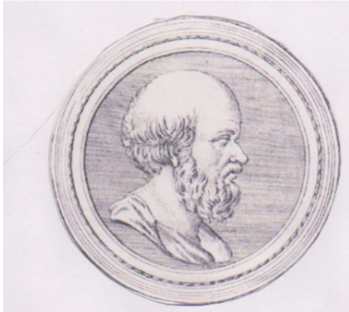
Le Crible d'Eratosthène revisité



Eratosthène est un savant grec du IIIème B.C. né à Cyrène. Il est célèbre pour avoir mesuré géométriquement la circonférence de la Terre.
On a l'habitude de présenter le Crible d'Eratosthène pour les cent premiers nombres, dans un carré naturel d'ordre n = 10, de 100 cases (1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	373	8	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On occulte ou poche successivement les nombres de ce carré naturel qui ne sont pas premiers.

On poche 1 qui est considéré comme n'étant pas premier.
2, 3, 5, 7 et 11sont les nombres premiers successifs : on poche les multiples de 2, de 3, de 5, de 7 et de 11.

Tous les nombres non pochés de la grille sont des nombres premiers, avec une répartition au hasard dans cette grille, sans aucune règle apparente.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	45	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

Cependant la présentation du Crible d'Eratosthène dans une grille rectangulaire à 6 colonnes, 6 x 17, de 102 cases, offre des caractéristiques particulièrement intéressantes.
On procède alors comme précédemment, pour le carré naturel de 100 cases.
Dans la grille ci-contre, le premier nombre premier est 2.
On élimine en les pochant (en gris) tous les nombres multiples de 2, soit les nombres pairs des colonnes 2, 4 et 6.
Le nombre premier suivant est 3 : on poche tous les multiples de 3 dans la colonne 3 (en sépia)
Le chiffre 5 est le nombre premier qui suit. On poche (en jaune) les multiples de 5 dans quatre diagonales, dont certains sont déjà pochés.
On poche ensuite les multiples de 7 (en vert), dont certains sont également déjà pochés. On s'arrête là, les multiples de 11 étant déjà pochés.

On constate alors que les nombres premiers situés dans les cases non pochées, se trouvent tous concentrés (à l'exception de 2 et 3) dans les colonnes 1 et 5 de manière consécutive en descendant dans la grille.

Et l'on observe que tous ces nombres premiers précèdent ou suivent immédiatement un multiple de 6.

Cette observation mérite que l'on s'y attarde. On peut formuler la propriété ci-dessus comme suit :

Tout nombre premier est de la forme 6 k – 1 ou 6 k + 1.

Mais *la réciproque n'est pas vraie* : tout nombre de la forme 6 k – 1 ou 6 k + 1 n'est pas un nombre premier. Il y a de nombreux exemples, ainsi :

91 - 1 = 90 est divisible par 6, mais 91 n'est pas premier (multiple de 7);
305 + 1 = 306 est divisible par 6, mais 305 n'est pas premier (multiple de 5) ;
341 + 1 = 342 est divisible par 6, mais 341 n'est pas premier (multiple de 11) . . .
On voit d'ailleurs très bien, dans la grille à six colonnes ci-dessus, que tous les nombres des colonnes « 1 » (de la forme 6 k + 1) et « 5 » (de la forme 6 k – 1), ne sont pas des nombres premiers.

Si l'on prolonge cette grille rectangulaire à l'infini vers le bas, en procédant aux éliminations « pochées » comme cela a été fait précédemment pour les 100 premiers nombres dans le carré naturel et dans la grille rectangulaire 6 x 17, il apparait que tous les nombres premiers restent bien dans les colonnes 1 et 5 de manière consécutive, et toujours avec la même propriété énoncée ci-dessus.

Cette grille rectangulaire se présente ainsi comme une ***vraie table des nombres premiers***, assortie d'une répartition bien définie de ces nombres premiers dans deux colonnes.
Cette présentation semble inédite. Mise à part la spirale d'Ulam, qui est partielle, on n'avait pas trouvé une représentation complète des nombres premiers consécutifs dans l'espace.

Corolaire : les Nombres premiers jumeaux.

La colonne « 6 » de la grille rectangulaire ci-dessus, éventuellement complétée vers le bas, donne tous les multiples consécutifs de 6, sans omission (2)
Il s'ensuit que tout nombre multiple de 6, auquel on ajoute ou retranche l'unité, donne un nombre premier dans l'une ou l'autre de ces deux opérations, et parfois deux nombres premiers : ainsi par exemple 72 donne 71 et 73 ; 810 donne 809 et 811 . . .
Dans ce dernier cas, on nomme ces couples de nombres premiers qui présentent un écart de 2 unités, « Nombres premiers jumeaux ».
On peut ainsi définir que *tout couple de nombres premiers jumeaux est de la forme* :

« 6 k – 1, 6 k + 1 »

Comme pour les nombres premiers, il y a une infinité de nombres premiers jumeaux, bien que cela ne soit pas démontré.

Voici les cinquante premiers Nombres premiers jumeaux, présentant un écart de 2 unités, qui figurent dans la grille à six colonnes « prolongée, laquelle peut être considérée aussi comme une vraie ***table des nombres premiers jumeaux*** (3) :

3, 5	5, 7	11, 13	17, 19	29, 31
41, 43	59, 61	71, 73	101, 103	107, 109
137, 139	149, 151	179, 181	191, 193	197, 199
227, 229	139, 241	269, 271	281, 283	311, 313
347, 349	419, 421	431, 433	461, 463	521, 523
569, 571	599, 601	617, 619	641, 643	659, 661
809, 811	821, 823	827, 829	857, 859	881, 883
1019, 1021	1031, 1033	1049, 1051	1061, 1063	1091, 1093
1151, 1153	1229, 1231	1277, 1279	1289, 1291	1301, 1303
1319, 1321	1427, 1429	1451, 1453	1481, 1483	1487, 1489

1) René Descombes – *Le Carré naturel, problèmes et jeux* – Editions *nuvis* 2011 - pp. 81-82.
2) Alex Bellos – *Alex et la Magie des Nombres* – Editions Robert Laffont 2015 – pp. 282 – 283.
3) Jean-Paul Delahaye – *Merveilleux nombres premiers – Voyage au cœur de l'arithmétique* – Belin – Pour la Science, 2000, p. 233.

Un crible de reconnaissance des nombres premiers

r	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*17*	
3	4	7	10	13	16	19	22	25	
5	7	12	17	22	27	32	37	42	
7	10	17	24	31	38	45	52	59	
9	13	22	31	40	49	58	67	76	
11	16	27	38	49	60	71	82	93	
13	19	32	45	58	71	84	97	110	
15	22	37	52	67	82	97	112	127	
17	25	42	59	76	93	110	127	138	

On écrit les nombres de la première ligne et de la première colonne de la grille, en progression arithmétique de raison $r_1 = 3$, à partir du nombre 4, qui conditionne la grille.
On écrit ensuite les nombres de la 2ème ligne et de la 2ème colonne, en progression arithmétique $r_2 = 5$, le premier terme de cette progression étant déjà inscrit dans la grille.
On poursuit ensuite l'écriture des lignes et des colonnes suivantes en progression arithmétique, telles qu'elles sont déjà amorcées : $r_3 = 7$; $r_4 = 9$; $r_5= 11$; etc . . .
Il y a des doublets dans la grille, mais c'est sans importance.

Les propriétés essentielles de cette grille sont alors :

- *Tout nombre « n » présent dans la grille engendre un nombre N = 2 n + 1 composé.*
- *Tout nombre « n » absent de la grille engendre un nombre N = 2 n + 1 premier.*

Ces propriétés sont à la base d'un test de primalité d'un nombre donné.

Mode d'emploi.

Soit un nombre « N » à tester. On calcule n = $\frac{N-1}{2}$; si n ne se trouve pas dans la grille, c'est que N est premier. Si par contre on repère « n » dans la grille, N est alors un nombre composé, non premier.

Exemple : soit N = 127 à tester ; n = $\frac{127-1}{2}$ = 63. Le nombre n = 63 n'est pas dans la grille : N est un nombre premier.

Le crible doit être suffisamment étendu pour permettre de tester de grands nombres (4).

René Descombes – 8 mai 2020 – « rene.descombes@wanadoo.fr »

---

(4) Boris Anastas'evitch Kordiemsky – Sur le sentier des mathématiques – Dunod 1963 – Vol. 2, pp. 115 – 117.