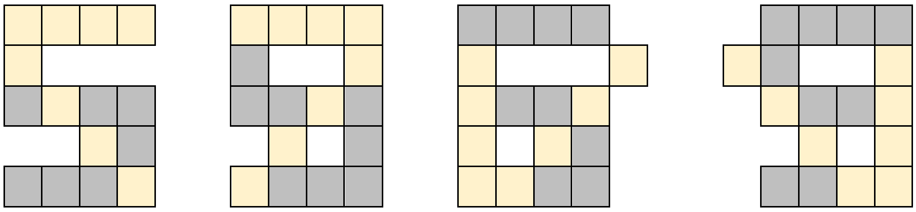
DEMI-FINALE 2020

1- Leurs chiffres préférés

Voici les 2 combinaisons possibles (avec le 7 à l'endroit et le 7 à l'envers) de la façon qui couvre le plus de carrés. Juste pour vérification, avec le 7 incliné, on ne peut pas couvrir plus de carrés.



Le plus petit nombre de carrés gris encore visibles est donc 7 (sur la première image)

2- Les pendules

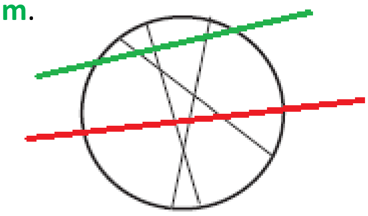
Une des pendules avance de 10 minutes. Or celle qui a l'heure la plus en avance indique 10h15. L'heure réelle est donc au plus 10h05.
Une des pendules retarde de 15 minutes. Or celle qui a l'heure la plus en retard indique 9h50. L'heure réelle est donc au moins 10h05.
L'heure exacte est donc 10h05.
Celle qui indique 10h10 est celle qui avance de 5 minutes et celle qui indique 10h00 est celle qui est en panne.

3- Faites 33

Aucune maison n'a le numéro 0.
Le numéro de la maison de Mathilde peut aller de 1 à 16. S'il atteint ou dépasse 17, le numéro de la maison de Mathis sera au plus 16 et donc plus petit que celui de Mathilde.
Il y a donc 16 possibilités : de 1 à 16 pour la maison de Mathilde et de 32 à 17 pour celle de Mathis.

4- Une pizza mal coupée

Tous les essais montrent qu'une nouvelle coupe traverse au maximum 4 régions.
Chaque fois qu'une coupe traverse une région, elle coupe la région en 2 et ajoute donc une part au total.
On peut donc ajouter au maximum 4 parts et donc avoir **11 parts au maximum**.
Voici deux exemples de découpage.



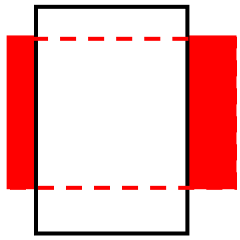
5- De 1 à 8

1			
		2	3

1	4	7	6
8	5	2	3

En plaçant tous les nombres de 1 à 8 dans le tableau, la somme totale des nombres fera
1+2+3+4+5+6+7+8=36
La somme sur chaque colonne fera donc 36 : 4 = 9.
Cela nous permet de placer le 8 en dessous du 1, le 7 au-dessus du 2, le 6 au-dessus du 3.
Il reste le 5 et le 4 à placer dans la colonne avec la case grise.
La somme pour chaque ligne doit faire 36 : 2 = 18. La ligne du bas contient déjà 8, 2 et 3 qui font 13. Le 5 va donc sur la ligne du bas et le 4 en haut. On vérifie la somme des nombres de la ligne du haut : 1+4+7+6=18.
La case grisée contient donc le nombre 5.

6- Les 2 rectangles



Sur la figure ci-contre, on voit très bien que la zone rouge recouverte forme un carré de 17 cm de côté (le dessin n'est pas à l'échelle volontairement).
La surface totale rouge mesure 17x20=340.
Le surface de la zone rouge recouverte est 17x17=289.
La surface rouge encore visible est donc : 340-289=**51 cm²**

7- Les puzzles

Version CM :
Il a 2 catégories de puzzles :

- les gros : on peut en fabriquer 80 dans le panneau
- les petits : on peut en fabriquer 100 dans le même panneau.

Imaginons qu'on puisse transformer chaque gros puzzle en petit. De chaque gros puzzle, on en fait un petit et on récupère une petite partie (une chute) de bois. On a donc 80 chutes qui permettent de créer 20 nouveaux petits puzzles pour arriver à 100 petits puzzles. Il faut donc 4 chutes pour faire un petit puzzle.
Chaque chute pèse 50 grammes. Donc chaque petit puzzle pèse 4x50=200 grammes.
Or un panneau permet d'en faire 100 et pèse donc 100x200=20.000 g = 20 kg
Un panneau de bois pèse 20 kg.
Version GP :
P est le poids du panneau, g le poids des gros puzzles, q le poids des petits.
Par hypothèse : P=80g=100q ⇔ 4g=5q et g-q=50
On en tire : 4(50+q)=5q ⇔ q=200 et donc P=100q=20.000

8- Répétition générale

L'écriture ♣♣ est le nombre qui vaut 11 x ♣ que je note 11♣. À noter que ♣ et ♦ sont interchangeables.
L'égalité s'écrit donc : 11♣ x 11 ♦ = 11 x 100 ♥ + 11 ♠ ⇔ 11♣♦ = 100♥+♠
Donc 100♥+♠ est divisible par 11.
♥ et ♠ étant des chiffres, le critère de divisibilité par 11 nous dit que ♥+♠ =0 (impossible) ou ♥+♠ = 11 (22 est aussi impossible). Chacun varie donc entre 2 et 9 (1 impossible sinon l'autre vaut 10 qui n'est pas un chiffre).
Dans ce cas, ♣♦ = 100♥+♠ : 11 doit pouvoir s'écrire comme produit de 2 nombres à un chiffre, différents et différents de ♥ et ♠. Le tableau suivant liste les cas possibles.

♥	♠	100♥+♠ : 11	♣, ♦	♥♥♠♠
2	9	19	Imp.	
3	8	28	4,7	3388
4	7	37	Imp.	
5	6	46	Imp.	
6	5	55	Imp.	
7	4	64	Imp. (8,8 pas ≠)	
8	3	73	Imp.	
9	2	92	Imp.	

Il n'y a donc qu'une seule solution : **♥♥♠♠ = 3388**

9- Des pommes

Si Mathilde avait une pomme de moins, son nombre de pommes serait divisible par 12, 14 et 21.
Il serait donc divisible aussi par le PPCM de 12, 14 et 21.
12=2x2x3, 14=2x7 et 21=3x7 donc PPCM(12,14,21) = 2x2x3x7 = 84
Mathilde aurait donc, avec une pomme de moins, 84 ou 168 pommes (pour rester plus petit que 199).
Il y a donc 2 solutions : Il y a 85 ou 169 pommes dans le caddie de Mathilde.

10- Diagonales

Chaque intersection provient du choix de 2 diagonales. Chaque diagonale provient du choix de 2 sommets. Chaque intersection provient donc du choix de 4 sommets et chaque choix différent de 4 sommets donne une intersection différente dans le meilleur des cas.

Dans le meilleur des cas, il y a donc $\binom{7}{4}$ = 35 intersections.

On arrive effectivement à construire une telle configuration (partir sur un octogone régulier, remplacer 2 côtés par un seul et modifier un peu la tailler des côtés. 3 diagonales peuvent se croiser en tout petit triangle, mais il y a bien 3 intersections).

Avec 5, on trouve bien $\binom{5}{4}$ = 5 intersections.

Il y a au maximum 35 intersections.

11- Les calendriers d'Amélie

Si on regarde un jour fixe de l'année, par exemple le 21 mars, le jour de la semaine se décale d'un jour les années non bissextiles et de 2 jours les années bissextiles.

Pour pouvoir réutiliser le calendrier, il faut que les jours de la semaine tombent comme en 2020.

Il faut donc que le décalage des jours soit un multiple de 7.

D'autre part, on ne pourra réutiliser le calendrier de 2020 (année bissextile) qu'une autre année bissextile.

On cherche donc les années bissextiles qui ont un écart qui est un multiple de 7 par rapport à 2020.

Toutes les 4 années, le décalage des jours de la semaine est de 5 jours.

Le plus petit multiple de 5 qui est aussi un multiple de 7 est 35 (car 5 et 7 sont premiers entre eux).

Le plus petit décalage de jours multiple de 7 se produit toutes les 7x4 = 28 années.

Il y a donc 2 solutions : on pourra réutiliser le calendrier de 2020 en 2048 et 2076.

(Il aurait fallu exclure 2100 si il avait fait partie de la liste car 2100 est bien au 21ème siècle mais n'est pas une année bissextile).

12- Tétraèdre

Dans un tétraèdre, chaque face touche toutes les autres (il suffit par exemple de considérer la face du dessous d'un tétraèdre posé sur une table pour visualiser).

La dernière condition devient donc : 2 nombres ne doivent jamais être consécutifs.

Si le plus petit nombre est égal à 3 ou plus, la combinaison sera supérieure ou égale à 3,5,7,9 dont la somme fait déjà 24, ce qui est impossible. Le plus petit nombre vaut donc 1 ou 2.

Cas 1 : Le plus petit nombre vaut 2.

Les autres font au minimum 4 6 8. La somme fait 20. **2,4,6,8** est donc une bonne réponse et la seule commençant par 2.

Cas 2 : Le plus petit nombre vaut 1.

On va regarder les différentes combinaisons commençant par (1,X)

Pour (1,3), la plus petite combinaison est 1, 3, 5, 7 dont la somme fait 16. Il y a donc 4 à répartir sur 5, 7 : (5,11) est impossible, (6,10) aussi, (7,9) est solution et (8,8) ne convient pas.

Cela donne une première solution : **1,3,7,9**

Pour (1,4), la plus petite combinaison est 1,4,6,8, la somme fait déjà 19. Il faut ajouter 1, la seule possibilité est sur le dernier nombre (sinon on ajoute au moins 1+1=2). Cela donne la solution **1,4,6,9**.

Pour (1,5), la plus petite combinaison est 1,5,7,9. La somme est déjà trop grande. Il n'y a pas d'autres solutions commençant par 1.

En conclusion, il y a **3 solutions : (1,3,7,9), (1,4,6,9), (2,4,6,8)**

13- Une baguette à couper

On cherche 3 nombres entiers a, b, c dont 2 sont égaux (triangle isocèle) et dont la somme fait 20.
On va choisir que b et c sont égaux. On cherche donc **a + 2b = 20**.
La condition pour pouvoir construire un triangle est que chaque nombre doit être strictement plus PETIT que la somme des 2 autres.
On doit donc avoir : $a < b + c = 2b$, $b < a + c \Leftrightarrow a > 0$ (n'apporte rien) et $c < a + b$ idem.
La condition intéressante est donc $a < 2b$.
Donc $20 = a + 2b < 2b + 2b$ donc $4b > 20$ et $b > 5$.
Donc b ne peut donc valoir que : 6, 7, 8 ou 9.
Chacun de ces cas donne une solution : (6, 6, 8), (7, 7, 6), (8, 8, 4) et (9, 9, 2).
Elle peut donc construire **4 triangles différents**.

14- Laby-sept

Tous les nombres se terminent par 7. Pour que la somme se termine par 0, il faut donc que la somme comprenne 10 ou 20 nombres. Avec 20 nombres (toute la grille), la somme serait supérieure à 20 x 187 > 2020. Il faut donc passer par 10 cases.
Pour simplifier, je vais remplacer tous les nombres de la grille par leur valeur moins 187 et diviser par 10.
La somme devra donc faire (2020-10*187) : 10=15
La grille devient :

	I	II	III	IV
A	~~0~~	2	5	~~0~~
B	~~5~~	0	~~5~~	~~2~~
C	2	0	~~0~~	~~5~~
D	0	2	2	0
E	2	0	~~5~~	2

Les cases de départ et d'arrivée apportent déjà 7 des 15 points.
On ne peut pas passer par une seconde case de 5 points. Sinon la somme ferait 12 et on ne pourrait pas atteindre 15. Les cases de 5 points (B-I, B-III, C-IV et E-III) sont donc barrées ci-dessus.
On ne peut pas partir vers la droite de la grille au début (route barrée par B-III et C-IV) donc A-IV et B-IV sont barrées. De même B-I est barrée (cul de sac).
On est donc obligé de passer par A-II et B-II et C-II. La somme fait 9 et 5 cases sont utilisées.
En raison des cases barrées, l'arrivée se fait par D-IV et D-III. La somme fait 11 et 7 cases sont utilisées.
Il n'est pas possible de passer par C-III, sinon le chemin est trop court (8 cases). C-III est donc barré.
Il reste sur la partie blanche ci-dessus à tracer un chemin de 3 cases et de 4 points. Donc 2 cases de 2 et 1 case de 0 joignant C-II à D-III.

Il n'y a qu'une possibilité : C-I, D-I, D-II qui donne la solution :

	I	II	III	IV
A	~~0~~	2	5	~~0~~
B	~~5~~	0	~~5~~	~~2~~
C	2	0	~~0~~	~~5~~
D	0	2	2	0
E	2	0	~~5~~	2

15- Pile ou face

On note les 10 tirages dans l'ordre avec pour chaque tirage P ou F. Par ex :. PPPFPFFFPFF.
Les tirages qui répondent à la question ont 5 P et 5 F.
Ils sont entièrement déterminés par la position des 5 P parmi les 10 positions possibles (les autres positions sont forcément des F).
Il y a donc $\binom{10}{5}$ = 252 combinaisons favorables (choix de 5 parmi 10).
Il y a 2 possibilités pour chaque tirage, sur 10 tirages successifs et indépendants, donc 2^{10} =1024 combinaisons possible. La probabilité est donc 252/1024.
La solution qui est la fraction irréductible est donc **63 : 256**.

16- Vacances en Syldavie

On cherche 4 nombres a,b,c,d entiers, positifs et impairs tels que 63a+77b+99c+239d=2020.
d vaut au plus 7 (9 x 239 = 2151 > 2020) et donc 1, 3, 5 ou 7.

Cas d=7 : 63a + 77b + 99c = 347 ⇔ 7(9a+11b) = 347 - 99c

c vaut 1 ou 3. Si c vaut 1, 7(9a+11b)=248 n'est pas divisible par 7. Si c vaut 3, 7(9a+11b)=50 qui n'est pas divisible par 7. Il n'y a pas de solution pour d=7.

Cas d=5 : 63a + 77b + 99c = 825 ⇔ 11(7b+9c) = 825 - 63a

825 est divisible par 11 (75x11). Donc 63a doit être divisible par 11. Or 63 et 11 sont premiers entre eux donc a doit être divisible par 11, impair et 63a doit être < 825. Donc a ne peut valoir que 11.
On a alors 7b+9c = 11x(75-63) : 11 = 12. Ce qui ne donne aucune solution.

Cas d=3 : 63a + 77b + 99c = 1303 ⇔ 11(7b+9c) = 1303 - 63a

1303 = 118 x 11 + 5. On cherche donc a tel que 63a soit congru à 5 modulo 11 pour que 1303 - 63a soit divisible par 11. Comme 63 et 11 sont premiers entre eux, les autres valeurs de a se déduisent en ajoutant 11.
Construisons un tableau des valeurs de 63a modulo 11. 63 étant congru à 8 modulo 11, il suffit d'ajouter 16 à 63a lorsqu'on ajoute 2 à a.

a	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
63a [11]	8	24=2	18=7	23=1	17=6	22=0	16=5	10	20=4	20=9	25=3	19=8

a vaut donc 13, 35, 57, … Mais 35*63 est de l'ordre de 2000 déjà bien plus grand que 1303.
Seul 13 peut convenir. Pour a=13, 1303 - 63a = 484 = 44 x 11, donc 7b + 9c = 44.
c ne peut valoir que 1 ou 3 (5 est déjà trop grand). Pour c=3, 7b=17 ne donne pas de solution.
Pour c = 1, 7b = 35 et donc b=5 donne la solution **13,5,1,3**

Cas d=1 : 63a + 77b + 99c = 1781 ⇔ 11(7b+9c) = 1781 – 63a

1781 = 161 x 11 + 10 (poser la division). On cherche donc a tel que 63a soit congru à 10 modulo 11 pour 1303 - 63a soit divisible par 11. On utilise le tableau ci-dessus. a vaut donc 15, 37, 59, …
Or 37 x 63 est plus grand que 2000.
Seul 15 peut convenir. Pour a=15, 1781 - 63a = 836, donc 7b + 9c = 76.
c ne peut valoir que 1, 3, 5 ou 7. Pour c=1, 5, ou 7, 76 – 9c n'est pas divisible par 7 (67, 31, 13).
Pour c = 3, 7b = 49 et donc b = 7 donne la solution **15,7,3,1**

Il y a donc 2 solutions : 13,5,1,3 et 15,7,3,1