36e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

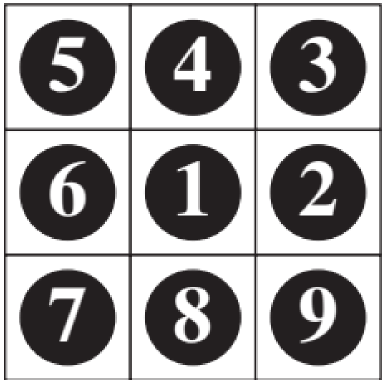
Demi-finale du 19 mars 2022

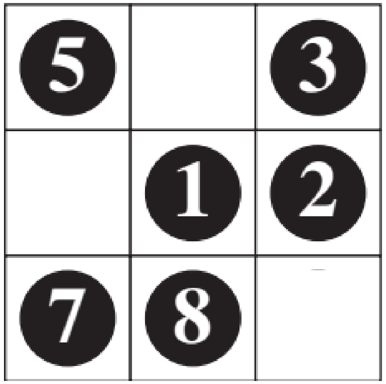
Solutions

Problème 1 – Les neuf jetons

- Sur les lignes,
  du haut vers le bas,
  Mathias peut enlever au maximum 5, 6 et 9,
  ce qui fait 20 au total
- Mais 20 est inatteignable
  car 5 et 6 sont dans la même colonne
- Par contre, 19 est atteignable
  lorsque Mathias enlève 4, 6 et 9

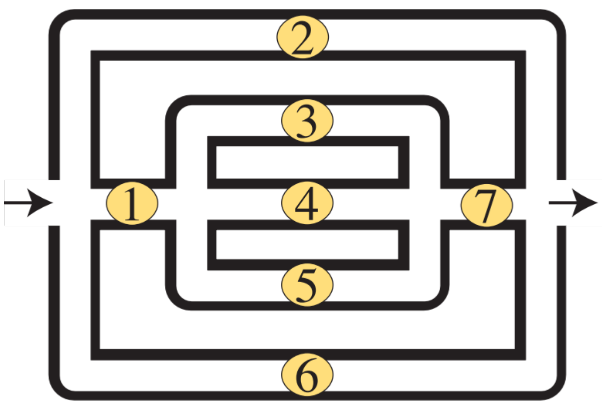
➢ Réponse : **19**





Problème 2 – Le fil d'Ariane

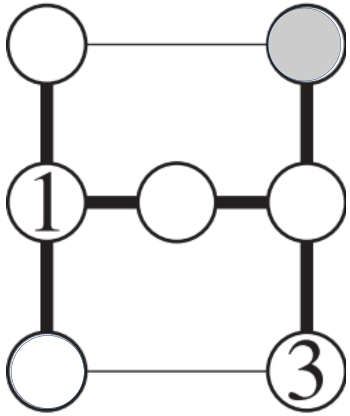
- Quand Ariane rentre au centre (par 1 ou 7), elle doit ressortir de l'autre côté (par 7 ou 1) après y avoir ramassé les pièces dans l'ordre 3-4-5 ou 5-4-3 afin d'éviter un croisement (1-4, 4-1, 4-7 ou 7-4 avec 3-5 ou 5-3)
- Elle ne doit pas commencer par 1, ce qui forcerait un croisement (→-1 avec 2-6 ou 6-2)
- Elle commence par 2 ou par 6, puis elle rentre au centre par 7



➢ Réponse : quatrième **4** et sixième **1**

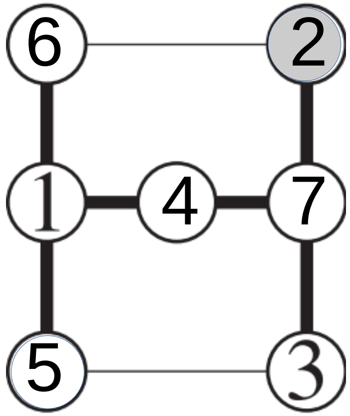
Problème 3 – De 1 à 7

- Sur chacun des deux traits épais passant par 1, il manque 11
- 11 est obtenu, d'une part, avec 7 et 4, et, d'autre part, avec 6 et 5



➢ Réponse : **2**

- Il y a 7 entre 2 et 3, donc 4 entre 1 et 7
- Afin de compléter les petits rectangles, il faut 6 en haut (6 + 2 + 12 = 20) et 5 en bas (12 + 5 + 3 = 20)



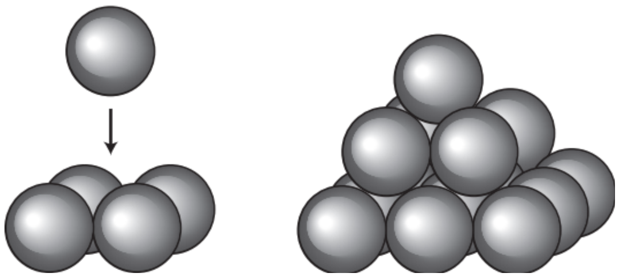
Problème 4 – Le nombre de Mathilde

- Soit AB le nombre à deux chiffres
- A x B = 2 x (A + B)
  - Si A = 1, 1 x B < 2 x (1 + B)
  - Si A = 2, 2 x B < 2 x (2 + B)
  - Si A = 3, 3 x B = 2 x (3 + B) donne B = 6 (18 de chaque côté)

➢ Réponse : **36**

Problème 5 – Les boules de pétanque

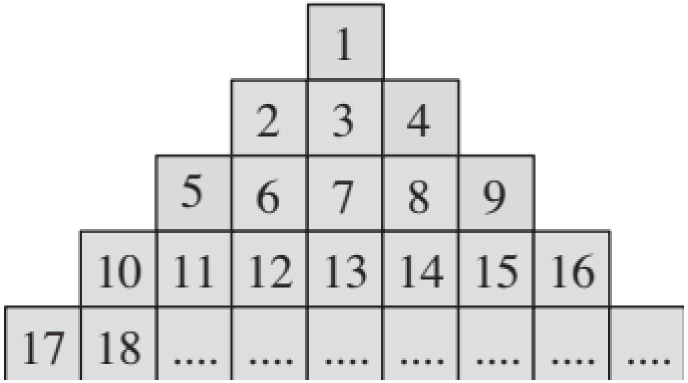
- Afin de coller entre elles les neuf boules du 1er étage, il faut 12 points de contact (2 sur chacun des quatre côtés et 4 autour de la boule centrale)
- Afin de coller les cinq boules sur les neuf boules, il faut 16 points de contact (4 sous chacune des quatre boules du 2ème étage)
- 8 + 12 + 16 = 36



➢ Réponse : **36**

Problème 6 – La pyramide de Mathilde

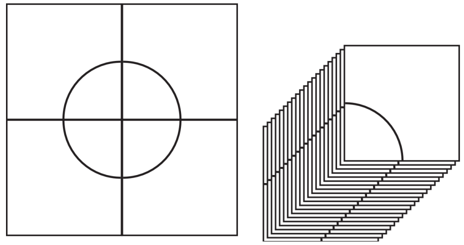
- De haut en bas, on compte
  1, 3, 5, 7, … nombres par étage
- On compte 1 + (22 – 1) x 2 = 43
  nombres sur l'étage du bas (le 22ème)
- Sur chaque étage,
  le plus petit nombre à gauche est
  alternativement impair ou pair
- Sur l'étage du bas (le 22ème), il est pair
- Sur l'étage du bas, on compte
  (43 – 1)/2 = 21 nombres impairs
  (et 22 nombres pairs)

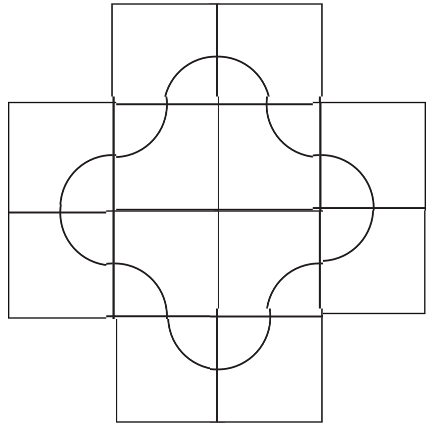


➢ Réponse : **21**

Problème 7 – Les cartes de Mathias

- Le centre du quart de cercle d'une carte est
  soit à l'intérieur de la boucle (type I)
  soit à l'extérieur de la boucle (type E)
- 4 divise le nombre de cartes d'un type
- En suivant la boucle dans un certain sens,
  on ne rencontre jamais une séquence
  de trois cartes du même type,
  ce qui forcerait la boucle de 4 cartes
- En alternant deux cartes de type I
  et une carte de type E,
  on forme une boucle de 4 x 3 = 12 cartes

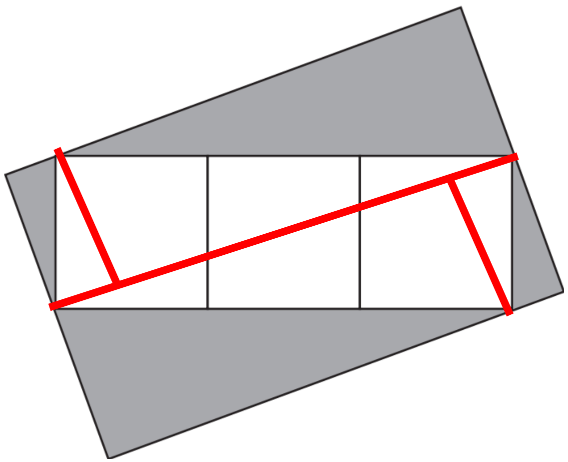




➢ Réponse : **12**

Problème 8 – Trois carrés sur un rectangle

- Chacun des quatre triangles rectangles se retrouve à l'intérieur du rectangle formé par les trois carrés blancs (symétries par rapport à chacun des quatre côtés de ce rectangle)
- L'aire du grand rectangle est le double de l'aire du rectangle formé par les trois carrés blancs
- 2 x (3 x 22) = 132



➢ Réponse : **132 cm2**

Problème 9 – Piquets et enclos

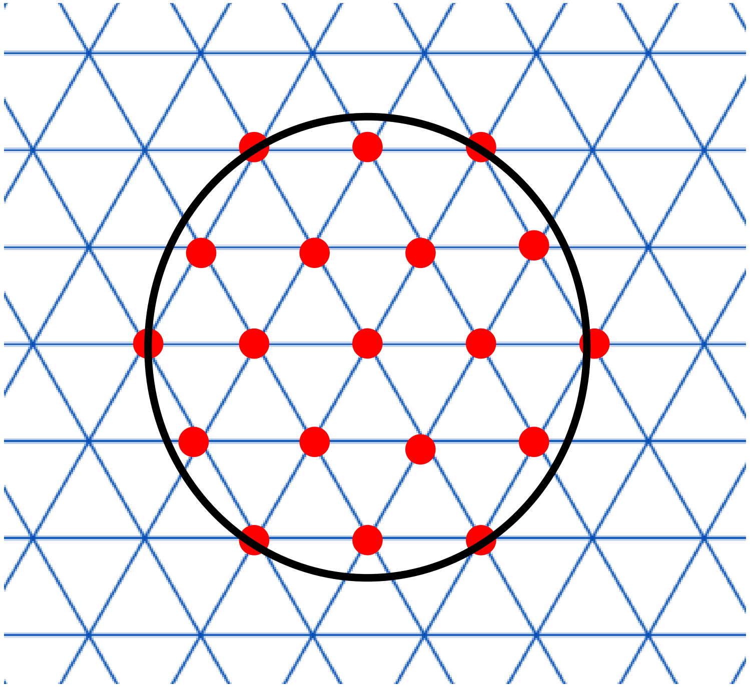
- Le maillage régulier du plan donne le nombre d'enclos le plus grand possible (24)
- À partir du centre du terrain, Sylvie peut atteindre

  1 piquet distant de 0 m (centre)

  6 piquets distants de 10 m

  6 piquets distants de $10\sqrt{3}$ m

  6 piquets distants de 20 m

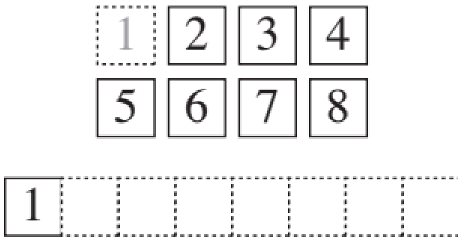


➢ Réponse : **19**

✔ $(1/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2 = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 = (5/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 7$, la distance suivante est $10\sqrt{7} > 20$ m (12 piquets)

Problème 10 – Les huit cartes

- Sur deux cartes côte à côte,
  les nombres écrits sont de parité différente
- Nombres impairs et pairs alternent
- À gauche du 7, il y a le 4 ou le 6
- À droite du 1 ou du 7, il y a le 4 ou le 6
  - Si le nombre commence par 1476, il y a le 5 à droite du 6, puis le 3 est entouré par 2 et 8
  - Si le nombre commence par 1674, il y a le 3 à droite du 4, puis le 5 est entouré par 2 et 6



➢ Réponses (4) : **14765238, 14765832, 16743258 ou 16743852**

Problème 11 – La somme de l'année

- Soient P la somme des nombres précédés du signe plus (positifs) et M la somme des nombres précédés du signe moins (négatifs)
- $P - M = 1 + \ldots + 100 = (100 \times 101) / 2 = 5050$ et $P + M = 2022$
- $M = (2022 - 5050) / 2 = -1514$
- Avec 16 nombres négatifs, on obtient au minimum $-(85 + \ldots + 100) = -(100 + 85) \times 16 / 2 = -1480$ qui est trop grand
- La quantité minimale de nombres négatifs est 17
- En font partie tous les nombres de -84 à -100 sauf un, disons $-X$, et $-1514 + 1480 + 84 - X = 50 - X$ (exclure plusieurs nombres est impossible car $50 - X - Y \leq -119 < -100$)
- $50 - X$ est minimum lorsque $X = 84$

➢ Réponse : **– 34**

Problème 12 – Les billets de loterie

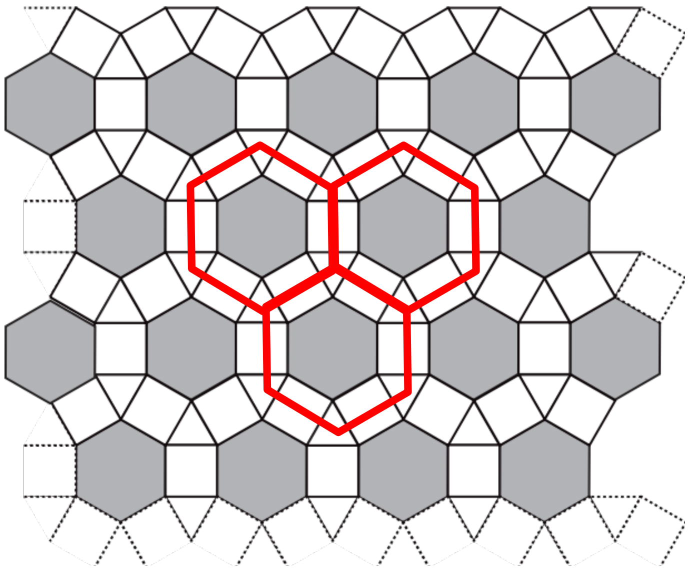
- Le billet de Mathilde commence par 18
- Soient 18ABC le billet de Mathilde et 09DEF celui de Mathias
- Si A = 2 ou 3, D est trop grand
- Si A = 4, D = 2, F = 3 et C = 6, impossible pour E et B (5 et 7)
- Si A = 5, D = 2
  - Soit F = 3 et C = 6, E = 7 et B = 4
  - Soit F = 7 et C = 4, E = 6 et B = 3
- Si A = 6, D = 3
  - Soit F = 2 et C = 4, impossible pour E et B (5 et 7)
  - Soit F = 7 et C = 4, E = 2 et B = 5
- Si A = 7, D = 3, E = 6 et B = 2, impossible pour F et C (4 et 5)

➢ Réponses (3) : **18546, 18534 ou 18654**

Problème 13 – Le pavage de Diane

- Un hexagone rouge sur le dessin pave le plan (illimité)
- Pour un hexagone régulier, on compte 6 moitiés de carré et 6 tiers de triangle équilatéral
- 1/{1 + (6x1/2) + (6x1/3)} = 1/6

➢ Réponse : **1/6**



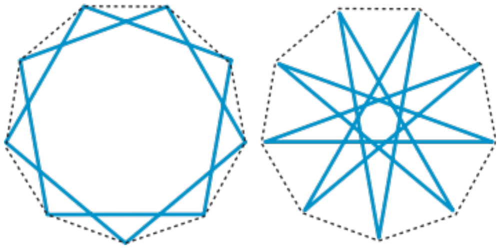
Problème 14 – LEON et NOEL

- LEON + NOEL = 1001(L + N) + 110(E + O) est divisible par 13
- E + O = 13 car 1001 est divisible par 13 (13 x 77) mais 110 ne l'est pas
- Modulo 7, $0 \equiv LEON \equiv 6L + 2E + 3O + N \equiv 6L + O + N + 5$ ($26 \equiv 5$)
- Modulo 7, $L - N \equiv O + 5$
  - Si L – N = -6, O = 3, impossible pour E
  - Si L – N = -4, O = 5, E = 8, L = 2 et N = 6
  - Si L – N = -2
    - Si O = 0, impossible pour E
    - Si O = 7, E = 6, L = 2 et N = 4
  - Si L – N = 2, O = 4, E = 9, L = 8 et N = 6
  - Si L – N = 4, O = 6, E = 7, L = 8 et N = 4
  - Si L – N = 6, O = 1, impossible pour E

➢ Réponses (4) : **2856, 2674, 8946, 8764**

Problème 15 – Les étoiles de l'année

- 2022 = 2 x 3 x 337
    - De 1 en 1 ou de 2021 en 2021,
      on n'obtiendrait pas un polygone régulier étoilé
    - De 2i en 2i, où i varie de 1 à 1010, non plus
    - De 3j en 3j, où j impair varie de 1 à 673,
      non plus (337 nombres)
    - De 337 en 337 ou de 337 x 5 en 337 x 5, non plus

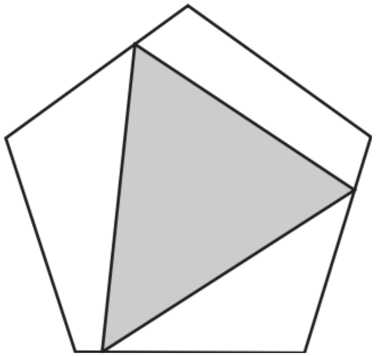


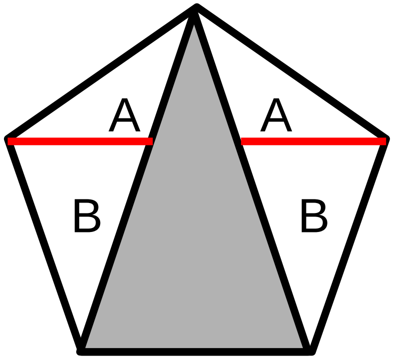
- Tous les cas ont ainsi été traités, et sans redondance
- 2 + 1010 + 337 + 2 = 1351
- En divisant par 2 (on tourne dans un sens ou dans l'autre),
  la quantité de polygones réguliers étoilés est (2021 – 1351)/2 = 335

➢ Réponse : **335**

Problème 16 – Un triangle sur un pentagone

- Deux sommets du triangle étant fixés, la translation du troisième sommet vers un sommet du pentagone augmente l'aire (ou ne la change pas)
- Le maximum est atteint avec la figure du bas
- La longueur d'une diagonale est $\phi = 2\cos 36°$ fois celle du côté du pentagone régulier
- $(\phi - 1)^2(A + B) = A$ donne $B = \phi A$
- L'aire du triangle gris est $\phi^2 B = \phi^3 A$
- Le quotient est $\phi^3 / (2 + 2\phi + \phi^3) = \phi / (2 + \phi) = \sqrt{5}/5$





➢ Réponse : **0,447**

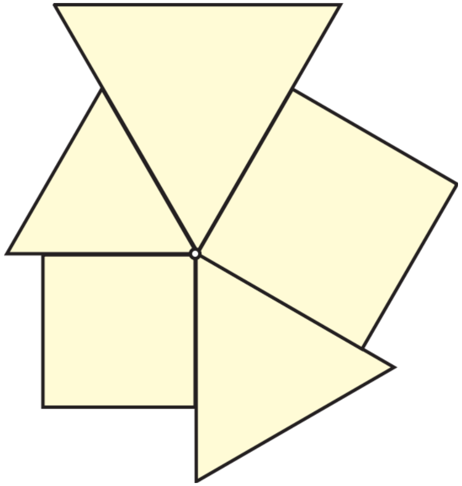
✔ $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ est solution de $X^2 - X - 1 = 0$

et cos36° est solution de $\cos 3t + \cos 2t = 0$

soit $(4X^2 - 2X - 1)(X + 1) = 0$

Problème 17 – les polygones de Mathilde

- L'angle au sommet d'un polygone à N côtés est 360° (1/2 – 1/N)
- Le problème revient à trouver a + b + c où a < b < c
  (les nombres de côtés) sont des entiers positifs
  tels que 1/a + 1/b + 1/c = 1/2
- 3≤ a ≤ 4 car 1/5 + 1/6 + 1/7 = 107/210 < 1/2
  - Si a = 4, 5 ≤ b ≤ 7 car 1/4 + 1/8 + 1/9 = 35/72 < 1/2
    (a;b;c) = (4;5;20) ou (4;6;12) convient
    mais b = 7 implique c = 28/3 non entier
  - Si a = 3, 7 ≤ b car 1/2 – 1/3 – 1/6 = 0
    et b ≤ 11 car 1/3 + 1/12 + 1/13 = 77/156 < 1/2
    (a;b;c) = (3;7;42), (3;8;24), (3;9;18) ou (3;10;15) convient
    mais b = 11 implique c = 66/5 non entier



➢ Réponses (6) : **29, 22, 52, 35, 30 ou 28**
(seul 52 introduit des angles non entiers en °)

Problème 18 – Un triangle très entier

- Posons $x = a + b - c$, $y = a + c - b$ et $z = b + c - a$ ($0 < x \leq y \leq z$ si $a \leq b \leq c$)
- L'aire du triangle est $xyz/16$ (formule de Héron)
- Le problème s'écrit $xyz/16 = a + b + c = x + y + z$
- $x = 2x'$, $y = 2y'$ et $z = 2z'$ (ils sont tous de même parité, et au moins un est pair)
- $x'y'z' = 4(x' + y' + z')$
- $x'y'z' \leq 12z'$ donc $x'y' \leq 12$, et $x'^2 \leq x'y'$ donc $x' \leq 3$
  - Si $x' = 1$, $(y' - 4)(z' - 4) = 20$ donne $(y';z') = (5;24)$, $(6;14)$ ou $(8;9)$
  - Si $x' = 2$, $(y' - 2)(z' - 2) = 8$ donne $(y';z') = (3;10)$ ou $(4;6)$
  - Si $x' = 3$, $3y'z' \leq 12z'$ donc $y' \leq 4$
    - Si $y' = 3$, $z' = 24/5$ non entier
    - Si $y' = 4$, $z' = 7/2$ non entier

➢ Réponses (5) : **60, 42, 36, 30 ou 24**
(les deux derniers triangles sont rectangles)