Problème 18 : Des carrés farceurs

On peut distinguer quatre cas :

$100 \leq n \leq 299$	$10\,000 \leq n^2 \leq 89\,401$
$300 \leq n \leq 316$	$90\,000 \leq n^2 \leq 99\,856$
$317 \leq n \leq 948$	$100\,489 \leq n^2 \leq 898\,704$
$949 \leq n \leq 999$	$900\,601 \leq n^2 \leq 998\,001$

1er cas : $100 \leq n \leq 299$.
On cherche k et n tels que $(n + k)^2 = n^2 + 10\,000$. On doit alors avoir
$2nk + k^2 = 10\,000$, soit $k(2n + k) = 10\,000$.
Nous cherchons donc des décompositions de 10 000 sous la forme $a \times b$ dans lesquelles $a < b$, $b - a$ pair et $100 \leq (b - a)/2 \leq 299$.

Seuls les deux produits 20×500 et 40×250 conviennent et conduisent chacun à une solution :
$20 \times (20 + 2 \times 240)$ donne $\boldsymbol{n} = \mathbf{240}$; $40 \times (40 + 2 \times 105)$ donne $\boldsymbol{n} = \mathbf{105}$.

2e cas : $300 \leq n \leq 316$.
On cherche k et n tels que $(n - k)^2 = n^2 - 90\,000$. On doit alors avoir
$2nk - k^2 = 90\,000$, soit $k(2n - k) = 90\,000$.
Nous cherchons donc des décompositions de 90 000 sous la forme $a \times b$ dans lesquelles $a < b$, $b + a$ pair et $300 \leq (b + a)/2 \leq 316$.
Deux décompositions conviennent : 300×300 et 250×360, qui donnent les solutions $\boldsymbol{n} = \mathbf{300}$ **et** $\boldsymbol{n} = \mathbf{305}$.

3e cas : $317 \leq n \leq 948$.
On cherche k et n tels que $(n + k)^2 = n^2 + 100\,000$. On doit alors avoir
$2nk + k^2 = 100\,000$, soit $k(2n + k) = 100\,000$.
Nous cherchons donc des décompositions de 100 000 sous la forme $a \times b$ dans lesquelles $a < b$, $b - a$ pair et $317 \leq (b - a)/2 \leq 948$.

Seuls les deux produits 100×1000 et 80×1250 conviennent, qui conduisent aux deux solutions $\boldsymbol{n} = \mathbf{450}$ et $\boldsymbol{n} = \mathbf{585}$.

4e cas : $949 \leq n \leq 999$.
On cherche k et n tels que $(n - k)^2 = n^2 - 900\,000$. On doit alors avoir
$2nk - k^2 = 900\,000$, soit $k(2n - k) = 90\,000$.
Nous cherchons donc des décompositions de 900 000 sous la forme $a \times b$ dans lesquelles $b + a$ pair et $949 \leq (b + a)/2 \leq 999$.
Trois décompositions conviennent : 900×1000, 750×1200 et 720×1250, qui conduisent aux solutions $\boldsymbol{n} = \mathbf{950}$, $\boldsymbol{n} = \mathbf{975}$ et $\boldsymbol{n} = \mathbf{985}$.

Le problème a donc **9 solutions : 105, 240, 300, 305, 450, 585, 950, 975, 985.**