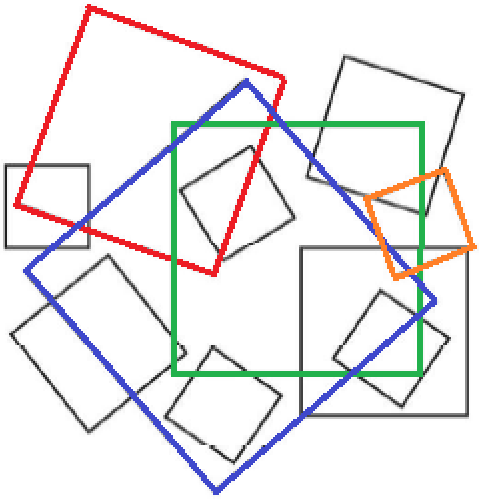
Correction détaillée des demi-finales FFJM du 20 mars 2021

Exercice 1



Regardons les carrés ayant le plus d'intersections avec d'autres carrés.
Le carré vert coupe 8 autres carrés. Il est évident qu'il faut le supprimer car sinon il faut supprimer 8 carrés.
Une fois enlevé, le carré bleu coupe 7 autres carrés. Il faut donc aussi l'effacer sinon il faut enlever 7 carrés.
Ces 2 carrés enlevés, il reste 2 zones à traiter : en haut à gauche. Soit on enlève les 2 petits carrés soit le grand en rouge. Pour minimiser, on choisit cette option.
Il reste enfin la zone de droite dans laquelle le petit carré orange coupe 2 autres carrés. C'est aussi lui qu'il faut supprimer.
Après ces 4 suppressions, aucun carré (noir) ne coupe un autre carré.

Il faut donc supprimer 4 carrés au minimum.

Exercice 2

La façon la plus simple consiste à écrire les différentes possibilités avec de 1 à 4 fléchettes. Il suffit d'en trouver au moins 1 pour chaque nombre et chercher le primer pour lequel on n'en trouve pas.
1=1, 2=1+1, 3=3, 4=3+1, 5=3+1+1, 6=3+3, 7=3+3+1, 8=3+3+1+1, 9=9. Comme les combinaisons de 1 à 7 n'utilisent que 3 fléchettes, en ajoutant le 9, on obtient toutes les combinaisons de 10 à 16.
Pour faire 17, il faut au moins un 9 (sinon la somme est ≤ 12) et un seul (sinon la somme est ≥ 18).
Il reste donc à faire 8 avec 3 fléchettes 1 ou 3. Il faut au moins 2 fois le nombre 3 mais pas 3 fois. Il n'est pas possible de faire 2 avec la dernière fléchette. On ne peut donc pas faire 17.
La réponse est 17.

Exercice 3

Comme on ne peut qu'aller vers la droite ou vers le bas, il suffit pour décrire le trajet de dire combien de cases on parcourt sur la rangée du haut (a) puis on descend d'une rangée, combien de cases sur la deuxième rangée (b), …
De même avec ces conditions de déplacement, on va traverser exactement 6 cases horizontales et 3 verticales. Le nombre de cases totales parcourues est donc : a+b+c+d=9 (1). Le nombre de pièces ramassées sera : a+2b+3c+4d=21 (1). En soustrayant la première équation de la seconde on obtient : b+2c+3d=12 (3)
a, b, c et d sont des entiers valant au moins 1 et au plus 6 a priori. Vu l'équation (3) d vaut au plus 3 et c au plus 4.
Essai avec d=3
b+2c=3 ce qui impose b=1 et c=1 donc a=4. Cela donne la solution **1+1+1+1+2+3+4+4+4**
Essai avec d=2
b+2c=6

c=1, b=4 donc a=2. Cela donne la solution **1+1+2+2+2+2+3+4+4**
c=2, b=2 donc a=3. Cela donne la solution **1+1+1+2+2+3+3+4+4**
Pas d'autre solution pour d=2 car à partir de c=3, b devient négatif ou nul.

Essai avec d=1

b+2c=9, c peut varier a priori de 1 à 4.

c=1, b=7 (Impossible)

c=2, b=5 donc a=1. Cela donne la solution **1+2+2+2+2+2+3+3+4**

c=3, b=3 donc a=2. Cela donne la solution **1+1+2+2+2+3+3+3+4**

c=4, b=1 donc a=3. Cela donne la solution **1+1+1+2+3+3+3+3+4**

Toutes les solutions sont différentes (par construction).

Il a donc 6 chemins différents.

Exercice 4

La somme des chiffres de 1 à 8 vaut 36.

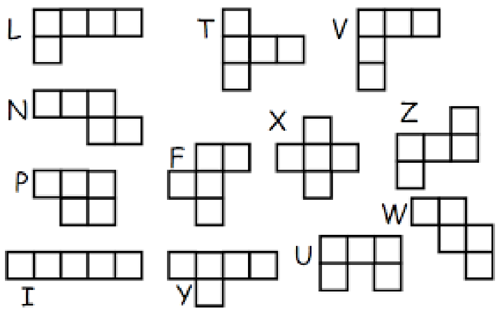
Il y a 4 paires de faces opposés 2 à 2 et cela représente toutes les faces. Comme la somme sera la même pour chaque paire de faces opposées, celle-ci vaut 9 Le plus difficile est ensuite de voir que la face grise sera en face de la face portant le chiffre 2. On peut éventuellement reproduire le patron et le découper.

Le nombre sur la face grise sera donc le 7 (9-2).

Exercice 5

La tablette fait 20 carrés. Si on veut la partager en 4 sans couper de carré, chaque morceau fera 5 carrés se touchant par un bord entier. C'est-à-dire, ce que l'on appelle un pentamino.

Il existe 12 pentaminos différents :



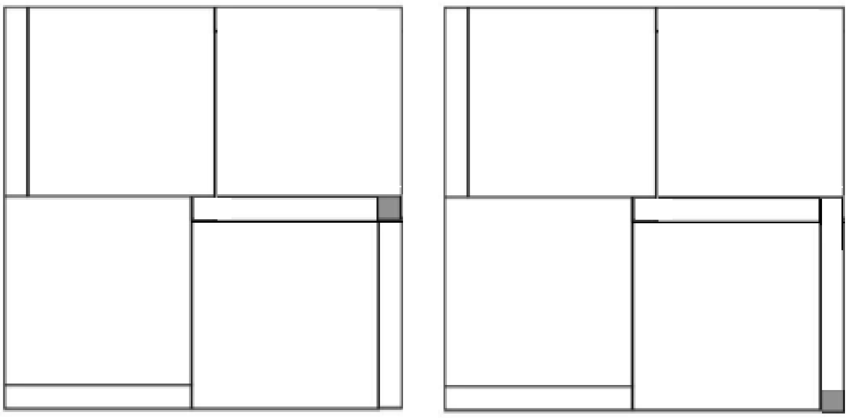
Il faut ensuite voir pour chacun d'entre eux, si on peut recouvrir un rectangle de 4x5 avec 4 pentaminos identiques au retournement prêt.

Seuls les pentaminos L P et I permettent de le faire.

La réponse est donc 3.

Exercice 6

La lampe peut aussi être au centre des cotés ou dans les coins.



En comptant le centre, **cela fait 9 positions possibles**.

Exercice 7

La première année suiveuse est 12, soit 1 suivi par 2. La suivante sera 2 suivi par 3, …
Écrivons donc les années suiveuses dans l'ordre :
12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 910 (à ne pas oublier), 1011, 1112, 1213, 1314, 1415, 1516, 1617, 1718, 1819, 1920, 2021 qui est la dernière autorisée.
Il ne reste qu'à faire la somme.

Pour réduire les calculs, on peut voir que le début c'est 11+1, 2x11+1, …, 8x11=1 soit 11(1+2+…+8)+8 soit 11*8*9/2+8=36*11+8=396+8=404. Puis que la fin vaut 10x101+1+11x101+1+…+20x101+1 soit 101(10+11+…20)+11=101x11x15+11=101x165+11=16676.
Il reste à calculer 16676+910+404=17990.
La réponse est 17990.

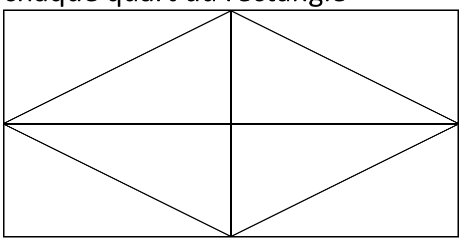
Exercice 8

Examinons les formes possibles.
Pour chaque coin : 2 creux, 2 bosses, 1 creux et 1 bosse (peu importe la position relative puisqu'on peut les retourner pour les empiler). Il y **3 formes possibles**.
Pour chaque pièce de côté : 3 creux, 3 bosses, 2 possibilités pour 2 creux et 1 bosse (la bosse près du bord droit ou la bosse en face du bord droit) et 2 possibilités pour 2 bosses et 1 creux (le creux près du bord droit ou le creux en face du bord droit). Il y a **6 formes possibles**.
Pour les pièces du centre, les formes possibles sont : 4 creux, 4 bosses, 1 creux et 3 bosses (peu importe la position du creux il suffit de tourner pour superposer), 1 bosse et 3 creux (idem). Il reste les pièces avec 2 bosses et 2 creux. Il y a 2 configurations possibles : 2 creux face à face ou côte à côte. Il y a donc **6 formes possibles** pour les pièces du centre.

Il y a donc au total 15 formes différentes possibles au maximum et donc **15 piles au maximum**.

Exercice 9

Le premier rectangle mesure 8x4=32 m^2 soit 3200 dm^2. Notons R1=3200.
Si on découpe ce rectangle en 4, on voit que chaque quart du losange est exactement la moitié de chaque quart du rectangle



La surface du premier losange vaut donc la moitié de celle du rectangle : L1=1600
De même la surface du second rectangle vaut la moitié de celle du premier losange : R2=800.
On a donc : L2=400, R3=200, L3=100, R4=50, L4=25, R5=12,5, L5=6,25, R6=3,125, L6~1,56 et R7 sera plus petit que 1.
On a donc tracé 6 losanges.

Exercice 10

On peut essayer à la main, en sautant tous les nombres premiers pour gagner du temps.
On peut gagner plus de temps en éliminant aussi les carrés de nombres premiers (3 diviseurs) et les produits de 2 nombres premiers (4 diviseurs).
Il suffit alors de chercher les diviseurs de 8, 12, 16, 18, 20, 24.

Sinon, 8 admet lui-même les décompositions dont les facteurs sont plus grands que 1 suivantes :
2x4 ou 2x2x2
Les nombres ayant 8 diviseurs sont donc de la forme $p.q^3$ ou p.q.r avec p, q, r premiers.
Le plus petit du premier type est $3.2^3=24$ et le plus petit du second type 2.3.5=30.
Le plus petit nombre ayant 8 diviseurs est donc 24.

Exercice 11

Notons c le côté du carré et l la longueur de la boite.
Le volume de la boite vaut $c^2.l=225$
Or 225 vaut 3^2x9^2.
D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, c=3 ou c=5. On pourrait avoir c=15 mais alors l vaut 1 ce qui est exclu par l'énoncé (et c=1 est aussi exclu).
Avec ces notations, la longueur de la ficelle vaut 2c pour chaque face carrée, l pour chaque face rectangulaire et 25 pour le nœud (à ne pas oublier), soit 4(c+l)+25.
Pour c=3, l vaut 25 et la longueur 4x28+25=137cm.
Pour c=5, l vaut 9 et la longueur 4x14+25=81 cm.
Il y a donc 2 solutions : 81 et 137 cm.

Exercice 12

Je n'ai pas trouvé d'autre solution simple que de tracer l'heptagone.
Pour le faire, il faut connaitre l'angle entre 2 côtés consécutifs.
Dans un polygone régulier à n côtés, la somme des angles formés par chaque paire de côtés consécutifs vaut 180(n-2). 180 pour un triangle, 360 pour un carré, …
Il y a ici 7 côtés, donc la somme des 7 angles fait 5x180=900° et l'angle fait donc environ 128°.
On peut donc le construire avec un rapporteur en partant d'un côté de base de 5 cm par exemple, cela permet d'avoir une figure permettant de tracer suffisamment précisément toutes les diagonales (4 depuis chaque sommet). Pour éviter l'accumulation de l'erreur sur l'angle construire symétriquement de chaque côté du côté de base.
Une fois toutes les diagonales tracées, numéroter chaque région comme sur la figure. On en trouve 50.
(Il existe une formule pour le nombre de diagonale n(n-3) : n-3 depuis chaque sommet mais je n'en connais pas pour le nombre de régions de façon générale.)
Il y a 50 régions intérieurs définies par les diagonales d'un heptagone régulier.

Exercice 13

Il faut écrire 6 nombres compris entre 1 et 42 avec 10 chiffres différents. Chaque nombre aura au moins 1 chiffre et il faut distribuer les 4 chiffres restants. Il y a donc 4 nombres de 2 chiffres (car tous plus petits que 43) et 2 nombres de 1 chiffre.
Comme tous les nombres doivent être plus petits de 43 et aucun ne commencent par 0, il y a 1 nombre commençant par 1, un commençant par 2, 1 par 3 et 1 par 4.
Le nombre commençant par 4 ne peut avoir comme 2ème chiffre que 0 car 1 et 2 sont déjà pris et les autres donneraient un nombre trop grand. Il y a donc forcément 40 dans la grille.
Pour le chiffre des unités de 1x, 2y et 3z et pour les 2 nombres à 1 chiffre, on a les 5 choix suivants : 5, 6, 7, 8, 9.

Il y a donc 5 choix pour 1x, 4 choix pour 2y et 3 choix pour 3z.
Il n'y a par contre plus aucun choix pour les nombres à 1 chiffre (en raison de l'ordre croissant de la grille).
Il y a donc au total : 5x4x3=60 grilles possibles

Exercice 14

On peut calculer la somme des nombres pour chacun des ensembles. Une condition nécessaire pour pouvoir partager en 2 sous-ensembles est que la somme soit paire. Cela exclut par exemple {1,2,3,4,5}. On peut vérifier que c'est une condition suffisante pour pouvoir partager l'ensemble en 2 comme demandé.
Ajoutons les nombres de l'ensemble en partant du plus grand jusqu'au moment où avec un nombre de plus, on dépasserait la moitié de la somme. La valeur manquante pour atteindre la moitié est plus petite que le dernier nombre ajouté, puisqu'elle est plus petite que le nombre qu'on n'a pas ajouté qui est plus petit que le dernier nombre ajouté. Il suffit de compléter l'ensemble avec ce nombre qui est encore forcément disponible.
Voici un exemple : on considère l'ensemble { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 }. La somme des nombres fait 66. Si on veut partager en 2 sous-ensembles dont la somme des éléments est identique, cette somme doit faire 33. On prend les nombres 11, 10, 9. Cela fait 30. Je ne peux pas ajouter le 8 sinon je dépasse 33. Le nombre qui me manque est forcément plus petit que 9 (sinon j'aurais pu ajouter 8). Il est donc dans les éléments restants. Je prends le 3 (ou le 1 et le 2). J'ai donc deux sous-ensembles {11, 10, 9, 3 } et de {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 } qui répondent au problème.
Il reste donc à trouver les ensembles dont la somme des nombres est paire.
S1 = 1, S2 = 3, **S3 = 6** (S3+3), **S4 = 10** (S4+4), S5=15, S6=21, **S7=28, S8=36**, S9, 45, S10=55, **S11=66, S12=78**, S13=91, S14=105, **S15=120, S16=136,** S17=153, S18=171, **S19=190, S20=210**, S21=231.

Il y a donc 10 solutions : 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19 et 20.

Exercice 15

La forme du parcours est une « spirale » carrée.
J'appelle BD_n le nombre de pas faits lorsque le robot est pour la nième fois dans un « coin » en Bas à Droite, c'est-à-dire au moment où il change de direction vers le nord. BD_1=1. BD_2=1+2+3+4+5=15.
On voit que BD_n =Somme des nombres de 1 à 4n-3.
HD_n lorsqu'il est pour la nième fois en Haut à Droite. HD_1=3.
Idem pour HG_n (HG_1=6) et BG_n (BG_1=10).
Si on note T_n le nième nombre triangulaire ($T_n=1+2+…+n=n(n+1)/2$), on a $BD_n=T_{4n-3}$, $HD_n=T_{4n-2}$, $HG_n=T_{4n-1}$ et $BG_n=T_{4n}$.
J'essaye ensuite de localiser sur quelle portion de trajet sera le robot après 2080 pas. Le fait de n'avoir que √2 me fait penser qu'il sera dans un coin ou au droit de la position de départ. A voir.
Je vais donc encadrer 2080 par 2 nombres triangulaires. Je cherche le plus grand n tel que $T_n \leq 2080$ soit $n(n+1) \leq 4160$. Pour avoir une approximation je vais chercher vers √4160. Or $4096=2^{12}$ donc je calcule T_{64} ($64=2^6$) qui vaut 32*65=2080.
T_{64} vaut exactement BG_{16}. Au bout de 2080 pas le robot est pour la 16ème fois exactement dans le coin en bas à gauche (sud-ouest), en train de tourner vers l'est. Il est donc à 32 petites diagonales vers le sud-ouest du point de départ. Chaque petite diagonale mesure 50√2 cm. Le robot est donc à 32*50*√2 cm. En prenant √2=1,414, on trouve : 2262,4 cm.

Arrondie au cm le plus proche la distance est donc : 2262 cm.

Exercice 16

Pour plus de commodité j'utilise des lettres usuelles et je remplace les valeurs déjà connues. Je note aussi α la base de numération utilisée. Je note en italique souligné *ab* le nombre obtenu en juxtaposant les chiffres a et b dans cette base, ce qui vaut aα+b. L'existence d'un symbole valant 9 nous indique que la base vaut au moins 10.

ab	c	*ad*
9	*a0*	*af*
g	*ah*	n

f, c et b représentent 3 chiffres croissants : c = f+1, b = f+2
En passant en base 10 et en utilisant tous les nombres ci-dessus, le carré devient :

			2αa+g+d **(8)**
αa+f+2	f+1	αa+d	2αa+2f+d+3 **(1)**
9	αa	αa+f	2αa+f+9 **(2)**
g	αa+h	n	αa+g+h+n **(3)**
αa+f+g+11 **(4)**	2αa+f+h+1 **(5)**	2αa+d+f+n **(6)**	2αa+f+n+2 **(7)**

Comme c'est un carré magique, la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même.
(1) et (2) donnent : 2f+d+3=f+9 ⇔f+d=6
(2) et (7) donnent : n+2=9 ⇔ **n=7**
(2) et (5) donnent : h+1=9 ⇔ **h=8**
(6) donne la valeur commune V=2α+6+7=2α+13
(1)=V donne 2αa+2f+d+3=2αa+13 ⇔ 2f+d=10, or f+d=6 donc **f=4** et **d=2**
(8)=V donne : g+d=13 donc **g=11**
(4)=V donne : f+g+11=2αa+13 ⇔ αa=13 donc **α=13** et **a=1**
c = f+1=5, b = f+2=6

Le carré magique est donc écrit en base 13 et vaut dans cette base (à gauche) et en base 10 à droite :

16	5	*12*
9	*10*	*14*
11	*18*	7

19	5	15
9	13	17
11	21	7

La valeur commune des lignes, colonnes et diagonales est donc : 39.
La somme des neufs nombres est 117.

Exercice 17

16 petites faces sont visibles dans le parallélépipède reconstitué. On cherche combien de parallélépipèdes présentent 12 faces peintes et donc 4 non peintes parmi tous les parallélépipèdes.

Dans un parallélépipède, un petit cube peut prendre 24 orientations différentes : chacune des 6 faces en bas par exemple et pour chacun de ses 6 cas, il y 4 rotations de 90° qui représentent chacune une configuration différente. Il y a donc 24^4 parallélépipèdes différents.
Chaque petit cube a exactement 4 faces peintes et 2 non peintes (les 2 qui touchent les autres cubes au moment de la peinture).

Un petit cube peut « apporter » 0, 1 ou 2 faces non peintes dans le parallélépipède reconstitué.
La discussion ci-dessous est pour le cube arrière gauche, mais le résultat est vrai pour chacun des 4 cubes en raison des symétries.

Il n'y a que **2 orientations qui apportent 0 face non peinte** : lorsque les 2 faces non peintes sont vers l'avant et vers la droite, la face du bas pouvant être échangée avec la face haute.

10 orientations contribuent à 2 faces non peintes visibles :
Il y a 4 choix pour la première face non peinte :
Vers l'arrière : 3 orientations sont alors possibles pour la seconde face non peinte : dessus, gauche, bas.
Vers la gauche : 2 orientations possibles : dessus ou dessous (ne pas compter $2^{\text{ème}}$ face vers l'arrière déjà comptée ci-dessus).
Vers l'avant : non car sinon cachée et impossible de faire 2 faces visibles.
Vers la droite : non pour la même raison.
Il y a donc 5 orientations et 5 autres en échangeant la face haute et la face basse.

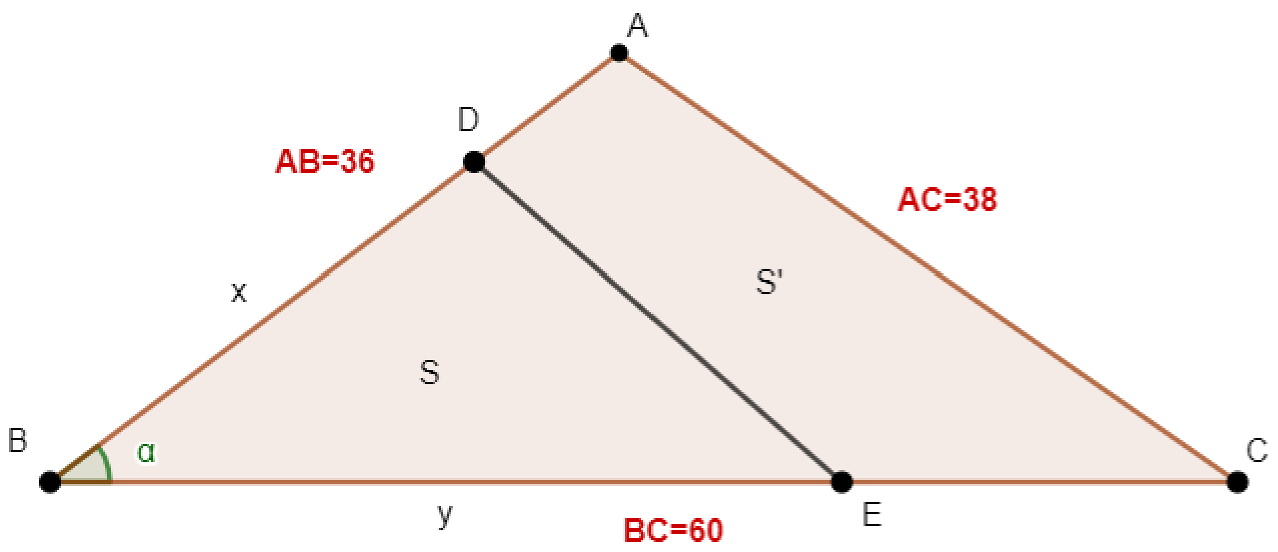
Il y a donc 24-2-10=**12 orientations contribuant à 1 face non peinte visible**.

Pour avoir exactement 4 faces non peintes visibles dans le parallélépipède reconstitué, il y a 3 possibilités :

- 2 cubes apportent 2 faces non peintes et 2 autres 0. Il y a 6 façons de choisir 2 cubes parmi 4. Il y a donc 6x10x10x2x2 parallélépipèdes de ce type.
- 1 cube apporte 2 faces non peintes, 2 cubes en apportent 1 et le dernier en apporte 0. Il y a 4 façons de choisir celui qui en apporte 2 et 3 celui qui en apporte 0. Il y a donc 4x3x10x2x12x12 parallélépipèdes de ce type.
- Les 4 cubes apportent chacun 1 face visible. Il y a donc 12x12x12x12 parallélépipèdes de ce type.

La probabilité est donc : $\frac{6\text{x}10\text{x}10\text{x}2\text{x}2+4\text{x}3\text{x}10\text{x}2\text{x}12\text{x}12+12\text{x}12\text{x}12\text{x}12}{24\text{x}24\text{x}24\text{x}24} = \frac{5\text{x}5+5\text{x}6\text{x}12+6\text{x}6\text{x}6}{2\text{x}12\text{x}12\text{x}12} = \mathbf{\frac{601}{3456}}$

Exercice 18



Les périmètres sont égaux :
$x+y+DE=DE+(36-x)+(60-y) \Leftrightarrow x+y=67$

$S=x.y.\sin\alpha / 2$
$S+S'=36.60.\sin\alpha / 2$

Les surfaces S et S' sont égales :
$xy=36.60-xy \Leftrightarrow x.y = 1080$

On connait la somme et le produit de x et de y.
Ils sont solutions de $X^2-67X+1080=0$.

$\Delta=67^2-4x1080=169=13^2$
x et y valent donc $\frac{67\pm13}{2}$ = 27 et 40
Et de façon évidente x qui est inférieur à 36 ne peut valoir 40.

Donc x=27 et y=40.

Régis Nicolas – rnicolas34@free.fr