Exercice 1 L'addition de Mathias.

Quand on additionne deux nombres plus petits que 100, on trouve un résultat plus petit que 200.
Par conséquent le chiffre des centaines (le cœur) est 1. 1+1=2 donc le trèfle est un 2.
Avec deux piques, on dépasse 10 donc le pique est plus grand que 4.
Comme il est plus petit que 6, c'est donc un 5. 5+5=10 donc le carreau est un 0.

L'addition est donc la suivante : 51+51=102.

$$\begin{array}{r} 51 \\ +\ 51 \\ \hline 102 \end{array}$$

La résultat de l'addition est donc **102**.

Exercice 2 Le double-mètre.

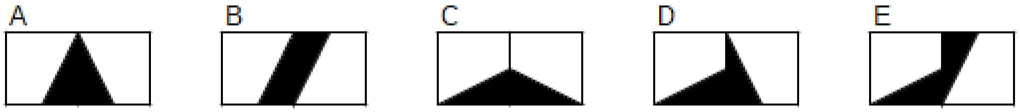
Penons comme unité le segment de 20 cm.
Le plus grand des côtés ne peut pas être supérieur à 5 unités sinon cela ne forme pas un triangle.
Il ne peut pas être égal à 5 unités car sinon le triangle est aplati (comme sur l'exemple).
Il peut être égal à 4 unités.
Il faut un total de 10 unités. Or 10=4+4+2 ou 10=4+3+3.
Le plus grand des côtés ne peut pas être de 3 unités (ni en dessous)
car au maximum on aurait $3+3+3=9 < 10$.

On a donc deux triangles possibles de côtés (4;4;2) et de côtés (4;3;3)

On peut obtenir **2 formes différentes** de triangles.

Exercice 3 Assemblages.

Le contact entre les deux parties noires se fait soit avec toute la longueur du côté du carré, soit avec la moitié de cette longueur.
Pour un contact entre les deux longueurs de côté on a deux possibilités : Figures A et B.
Pour un contact entre les deux moitiés de longueur de côté on a une possibilité : Figure C.
Pour un contact entre une longueur de côté (à gauche) et une moitié de longueur (à droite), on a deux possibilités : Figures D et E.



On peut avoir **5 rectangles différents**.

Exercice 4 Engrenages.

Quand la roue A fait 10 tours, on parcourt $10 \times 30 = 300$ dents au total.
La roue B et la roue C parcourent aussi 300 dents.
Comme la roue C possède 25 dents et que $25 \times 4 = 100$, alors en 4 tours elle parcourt 100 dents donc en $4 \times 3 = 12$ tours elle parcourt $100 \times 3 = 300$ dents.

La roue C fait donc **12 tours** .

Exercice 5 Le jeu de Mathilde.

Les cartes n°9;8;7;6;5;4 et 3 touchent forcément (si elles sont utilisées) les cartes n°19;18;17;16;15;14 et 13 et seulement elles. Elles sont donc (si elles sont utilisées) au début ou à la fin de la pile. On ne peut donc en utiliser que deux. Prenons par exemple 9 et 3 et laissons de côté 8;7;6;5 et 4.
Montrons qu'on peut passer par toutes les autres cartes :
9/19/18/17/16/15/14/11/10/0/20/21/2/12/1/13/3.

Nous avons au maximum une pile de **17 cartes**.

Exercice 6 Multiplications à compléter.

Si le chiffre des centaines du premier facteur est supérieur ou égal à 2, alors le résultat serait plus grand que 1400. Donc le chiffre des centaines du premier facteur est 1.
$(7\times1)+2=9$ donc la retenue est de 2.
Le chiffre des dizaines du premier facteur est alors de 2, 3 ou 4 car $7\times2=14$, $7\times3=21$ et $7\times4=28$.

Si c'est 2 alors la retenue est d'au moins $20-14=6$. Or $7\times8=56$ donc la retenue est de 5 au maximum.

Si c'est 3 alors le chiffre des unités du premier facteur est 2;4;5;6 ou 8.
Testons ces 5 calculs :

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 2 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 2\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 3\ 4 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 3\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 3\ 5 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 4\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 3\ 6 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 5\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 3\ 8 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 6\ 6 \end{array}$$

Le premier contient deux 2, le deuxième deux 3, le troisième deux 5 et le cinquième deux 6.
Le quatrième calcul est une solution possible.

Si c'est 4 alors la retenue doit être de 0 pour obtenir 28 (29 étant interdit). Ce faisant le seul calcul possible est $7\times1=7$ ce qui est impossible car 7 n'est pas dans les jetons et 1 est déjà utilisé.

La seule solution est :

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 6 \\ \times \quad\ 7 \\ \hline 9\ 5\ 2 \end{array}$$

Les deux chiffres non utilisés sont donc **4 et 8**.

Exercice 7 Le triangle de l'année.

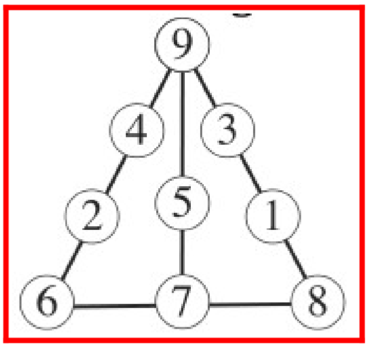
Pour la ligne du bas, on a 21-6=15. Or 15=9+6=8+7. Comme on ne peut pas utiliser un autre 6, la seule possibilité pour la ligne du bas est 6;7;8 ou 6;8;7.

Pour la ligne de gauche on a 21-6-2=13. Or 13=9+4=8+5=7+6. Or 6 ;7 et 8 sont déjà utilisés donc il ne reste que 4 et 9.

Pour la ligne centrale, on peut donc avoir les couples (4;7), (4;8), (9;7) ou (9;8).
21-(4+7)=21-11=10 ce qui est impossible.
21-(4+8)=21-12=9 ce qui est impossible car le 9 apparaîtrait deux fois.
21-(9+7)=21-16=5 ce qui est possible.
21-(9+8)=21-17=4 ce qui est impossible car le 4 apparaîtrait deux fois.
La ligne centrale est donc composée de 9 ; 5 et 7.

Pour la ligne de droite, il reste donc un chiffre manquant qui est 21-(9+8+1)=21-18=3.

La seule solution est donc :



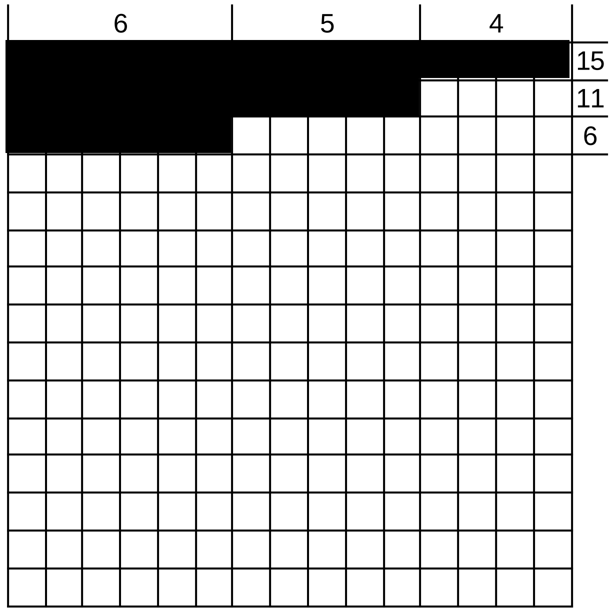
Exercice 8 Date d’anniversaire.

Traitons les mois un par un :
En janvier : 01/20 il manque un 1 et un 2 cela peut être 12 ou 21.
En février : 02/20 il manque deux chiffres identiques différents de 0 et de 2 c’est donc le 11.
En mars : 03/20 il manque un 2 et un 3 c’est donc le 23.
En avril : 04/20 il manque un 2 et un 4 c’est donc le 24.
En mai : 05/20 il manque un 2 et un 5 c’est donc le 25.
En juin : 06/20 il manque un 2 et un 6 c’est donc le 26.
En juillet : 07/20 il manque un 2 et un 7 c’est donc le 27.
En août : 08/20 il manque un 2 et un 8 c’est donc le 28.
En septembre : 09/20 il manque un 2 et un 9 c’est donc le 29.
En octobre : 10/20 il manque un 1 et un 2 cela peut être 12 ou 21.
En novembre : 11/20 il manque un 0 et un 2 cela peut être 02 ou 20.
En décembre : 12/20 il manque un 0 et un 1 cela peut être 01 ou 10.

Au total cela nous fait **16 dates en 2020**.

Exercice 9 Cases noires.

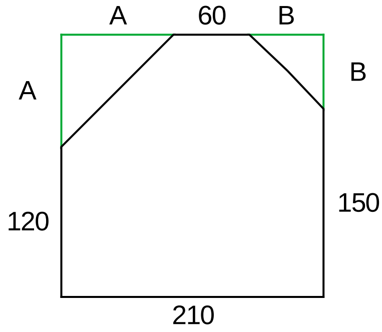
Toutes les colonnes ont au moins une case noire, cela fait 15 cases noires.
4 colonnes ont 1 seule case noire.
15-4=11. Donc 11 colonnes ont au moins deux cases noires, 15+11=26, cela fait 26 cases noires.
Il y a 32 cases noires au total, 32-26=6, donc 6 colonnes ont une autre case noire.



Il y a **1 seule réponse** Il y a **6 colonnes avec 3 cases noires**.

Exercice 10 Carrelage.

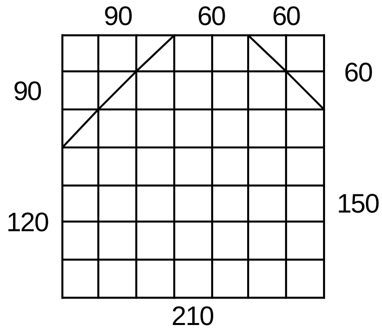
180°-135°=45°. Par conséquent, pour obtenir le hall, on prend un rectangle auquel on enlève deux triangles rectangles et isocèles. On appelle A la longueur du côté de l'angle droit du triangle gauche et B celle du triangle droit.



On a A+B=210-60=150 (horizontalement) et A-B=150-120=30 (verticalement).
On en déduis que A=90 et B=60.

Pour les plus aguerris, on peut faire A=(150+30)÷2=180÷2=90 et B=(150-30)÷2=120÷2=60.

Dessinons maintenant nos carreaux de 30 cm de côté.
60=30×2 ; 90=30×3 ; 120=30×4 ; 150=30×5 et 210=30×7.



Le rectangle fait 7×7=49 carreaux.
Le triangle de droite fait 2×2÷2=2 (on peut aussi les compter).
Le triangle de gauche fait 3×3÷2=4,5 (on peut aussi les compter).
On a besoin pour le hall de 49-2-4,5=42,5 carreaux.

Il doit acheter au minimum **43 carreaux**.

Exercice 11 Le parc animalier.

Partons du cas où il y a 17 dromadaires, 0 chameau et 0 âne. C'est faux car 17>15 animaux.
Ensuite à chaque étape nous allons remplacer 2 dromadaires par un chameau.

- 15 dromadaires, 1 chameau, 0 âne. C'est faux car 15+1>15 animaux.
- 13 dromadaires, 2 chameaux, 0 âne. C'est faux car il doit y avoir des ânes même si 13+2=15.
- 11 dromadaires, 3 chameaux, 15-11-3=1 âne. Or il y a plusieurs ânes.
- 9 dromadaires, 4 chameaux, 15-9-4=2 ânes. On a une solution.
- 7 dromadaires, 5 chameaux, 15-7-5=3 ânes. On a une autre solution.
- 5 dromadaires, 6 chameaux, 15-5-6=4 ânes. On a une troisième solution.
- 3 dromadaires, 7 chameaux, 15-3-7=5 ânes. On a une quatrième solution.
- 1 dromadaire, 8 chameaux, 15-1-8=6 ânes. Or il y a plusieurs dromadaires.

Nous avons **4 solutions : 3;5;7 ou 9 dromadaires**.

Exercice 12 Une drôle d'année.

Si A>2 alors ABCD>2021 ce qui n'est pas possible.
Si A=2 alors ABCD+ABC>2000+200=2200>2021. C'est donc impossible aussi.
Donc A=1.

Si B=9 alors ABCD+ABC>1900+190=2090>2021. C'est donc impossible.
Si B=8 alors on doit avoir 1 de retenue pour les milliers pour faire 1+1=2.
De plus on a 1 de retenue pour les centaines car 1+8+1=10.
Soit r la retenue des dizaines. On a r+C+8+1=12 donc r+C=3.
r>0 car on passe pour les unités de 8 à 1.
Si r=1 alors C=2 et D+2+8=11 donc D=1. On a une solution c'est 1821.
Si r=2 alors C=1 et D+1+8=21 donc D=12 (impossible).

Si B<7 alors au maximum on a 1799+179+17=1995<2021.

Nous avons **1 solution : c'est l'année 1821**.

Exercice 13 Le bijou.

Appelons C le côté de la face carrée, et L l'autre dimension des rectangles non carrés.
Volume=C×C×L.
Aire = 2× (C×C) +4× (C×L).
Par conséquent C×C×L =2× (C×C) +4× (C×L). Divisons tous les termes par C, il vient :
C×L =2C+4L puis C(L-2)=4L et enfin $C=\frac{4L}{L-2}$.
L et (L-2) sont distants de 2, ils sont donc soit premiers entre eux soit divisibles par 2.

Dans le premier cas, L et L-2 sont impairs et L-2 divise 4 donc L-2=1 car c'est le seul diviseur impair de 4.
On a alors L=3 et C=4×3÷1=**12**. C'est une solution.

Dans le deuxième cas L=2K et L-2=2K-2=2(K-1) d'où $C=\frac{4\times 2K}{2(K-1)}=\frac{4K}{K-1}$.
K et K-1 sont distants de 1, ils sont donc premiers entre eux. Donc (K-1) divise 4 d'où :

- K-1=1 donc K=2, L=2×2=4 et C=4×2÷1=**8**. C'est une autre solution.
- K-1=2 donc K=3, L=2×3=6 et C=4×3÷2=6. Or C≠L car les rectangles sont non carrés.
- K-1=4 donc K=5, L=2×5=10 et C=4×5÷4=**5**. C'est une autre solution.

Nous avons **3 solutions : 5 ; 8 ou 12 cm**.

Exercice 14 Opération à restaurer.

Appelons x le nombre ajouté.
$(12+x)(21+x)=2021+x$. En développant cela donne $x^2+12x+21x+252=2021+x$.
Donc $x^2+32x-1769=0$

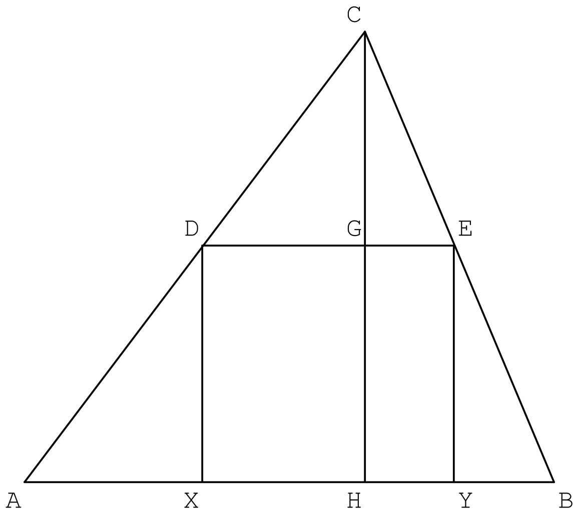
Pour les candidats C2 :
Factorisons cette expression à gauche.
$32\div 2=16$ et $(x+16)^2=x^2+16x+16x+256=x^2+32x+256$. Donc $x^2+32x=(x+16)^2-256$
Par conséquent $x^2+32x-1769=(x+16)^2-2025=(x+16)^2-45^2=(x+16-45)(x+16+45)=(x-29)(x+61)$
$(x-29)(x+61)=0$
Donc soit $x-29=0$ et $x=29$; soit $x+61=0$ et $x=-61$.

Nous avons **2 solutions : 29 et -61**.

Remarque : pour les candidats lycéens (et plus), on peut utiliser le discriminant
$\Delta=32^2+4\times 1769=1024+7076=8100=90^2$
donc soit $x=(-32+90)\div 2=58\div 2=29$ soit $x=(-32-90)\div 2=-122\div 2=-61$.

Nous avons **2 solutions : 29 et -61**.

Exercice 15 Une pièce sous le toit.



AB=7 m ; BC=6,5 m ; AC=7,5 m.
Traçons la hauteur de ABC issue de C.
Posons c la longueur du côté du carré.

Calculons le périmètre de ABC : 7+7,5+6,5=21 m.
Donc le demi-périmètre vaut 21÷2=10,5 m.

D'après la formule de Héron l'aire de ABC vaut :

$$\text{Aire} = \sqrt{10,5\times(10,5-6,5)\times(10,5-7)\times(10,5-7,5)}$$
$$= \sqrt{10,5\times4\times3,5\times3} = \sqrt{10,5\times2\times2\times10,5} = 10,5\times2 = 21 \text{ m}^2$$

Par conséquent CH=21×2÷7=6 m.

D'après le théorème de Pythagore,
comme BCH est rectangle en H, on a :
$BH^2=6,5^2-6^2=42,25-36=6,25=2,5^2$.
Donc BH=2,5 m

AH=7-2,5=4,5 m.

(DX)//(CH) donc d'après le Théorème de Thalès : $\dfrac{AX}{AH}=\dfrac{DX}{CH}$ donc $AX=\dfrac{4,5c}{6}=\dfrac{9}{12}c$.

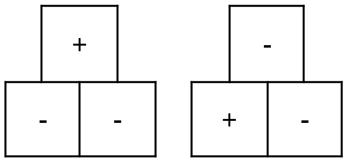
(EY)//(CH) donc d'après le Théorème de Thalès : $\dfrac{BY}{BH}=\dfrac{EY}{CH}$ donc $AX=\dfrac{2,5c}{6}=\dfrac{5}{12}c$.

Or AB=AX+XY+BY=7 donc $\dfrac{9}{12}c+\dfrac{12}{12}c+\dfrac{5}{12}c=7$ donc $\dfrac{26}{12}c=7$ $\quad \dfrac{13}{6}c=7$ et $c=\dfrac{42}{13}\approx3,23$ m.

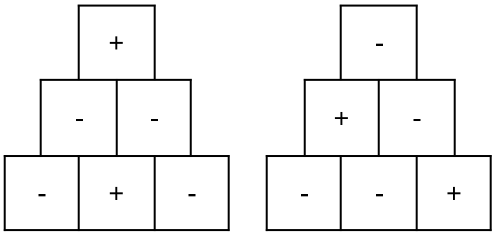
La longueur du côté du carré est d'environ **3,23 m**.

Exercice 16 La pyramide des signes.

Le haut de la pyramide qui maximise le nombre de signe – est l'une des deux possibilités suivantes :



Si on descend on peut avoir :



On ne va pas mettre 3 signes – en bas car on aurait 3 signes + en haut ce qui est moins avantageux.
On va donc alterner deux signes – et un signe + sur les lignes.
Prenons la pyramide à l'envers :

```
-+--+--+--+--+--+--+-
 --+--+--+--+--+--+--
  +--+--+--+--+--+--+
   -+--+--+--+--+--+-
    --+--+--+--+--+--
```

Si on compte les signes -, cela donne 14;14;12;12;12;10;10;10 ;…;2 ;2 ;2;0.
On compte au total 3×2×(1+2+3+4+5+6+7)-14=6×7×8÷2-14=42×4-14=168-14=154 signes -.

Prenons une autre séquence de démarrage :

```
+--+--+--+--+--+--+--
 -+--+--+--+--+--+--+
  --+--+--+--+--+--+-
   +--+--+--+--+--+--
```

Si on compte les signes +, cela donne 7;7;6;6;6;5;5;5 ;… 1;1;1;0.
On compte au total 3×(1+2+3+4+5+6+7)-7=3×7×8÷2-7=21×4-7=84-7=77 signes +.
Calculons le nombre de signes : 21×22÷2=21×11=231 signes au total.
231-77=154. Il y a là aussi 154 signe -.

Il y a au maximum **154 signes -**.

Exercice 17 Que de triangles !

Si on appelle x,y et z les valeurs des trois angles classées par ordre croissant, on obtient :

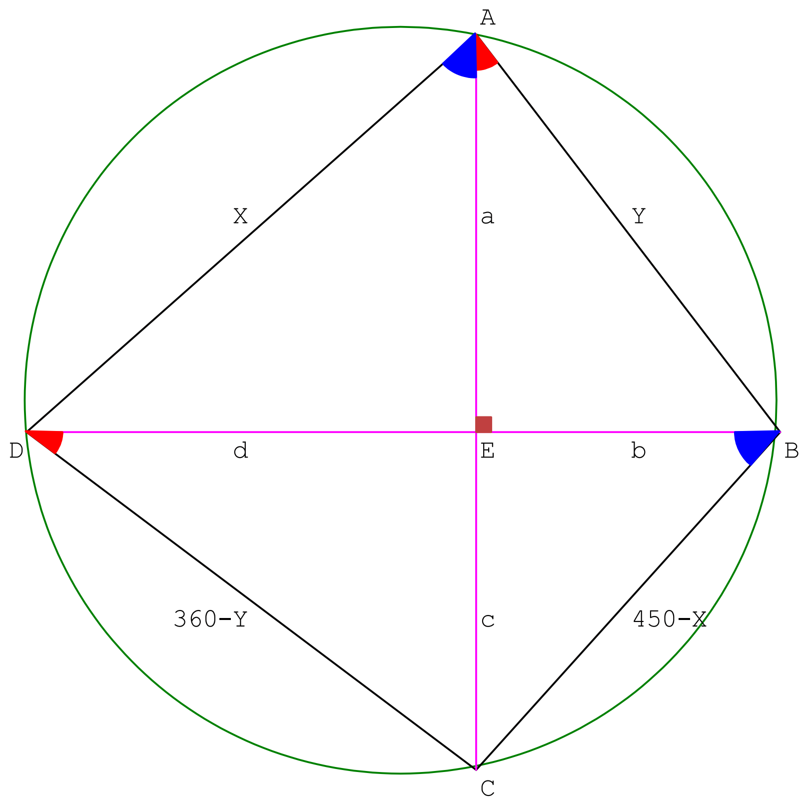
x	y	z	nombre de triangles
1	De 1 à 89	De 178 à 90	89
2	De 2 à 89	De 176 à 89	88
3	De 3 à 88	De 174 à 89	86
4	De 4 à 88	De 172 à 88	85
5	De 5 à 87	De 170 à 88	83
…	…	…	…
57	De 57 à 61	De 66 à 62	5
58	De 58 à 61	De 64 à 61	4
59	De 59 à 60	De 62 à 61	2
60	60	60	1

Quand on fait le total des triangles, on compte tous les nombres de 1 à 89 (ou 90) moins tous les multiples de 3.
(1+2+3+… +90)-3×(1+2+3+...+30)=90×91÷2-3×30×31÷2=90×(91-31)÷2=90×60÷2=90×30=2700.

Il y a **2700 triangles différents**.

Exercice 18 Le terrain du Père Midechasse.

Posons ABCD le nom du quadrilatère dont les diagonales se croisent en E.
Posons $a=EA$, $b=EB$, $c=EC$, $d=ED$.
Posons $X=AD$ et $Y=AB$.
Alors $BC=450-X$ et $CD=360-Y$.



Les points A, B, C et D étant sur un même cercle, on a $\widehat{BDC}=\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$.
Posons $\widehat{A}=\widehat{BAC}$ et $\widehat{A}'=\widehat{CAD}$.

$a=Y.\cos(\hat{A})$
$b=Y.\sin(\hat{A})$
$c=(360-Y).\sin(\hat{A})$
$d=(360-Y).\cos(\hat{A})$

$\text{Aire}(ABCD)=(a+c)\times(b+d)\div 2$

$=[(360-Y)\sin(\hat{A})+Y.\cos(\hat{A})]$
$\times[Y.\sin(\hat{A})+(360-Y).\cos(\hat{A})]\div 2$

$=[360.\sin(\hat{A})+Y(\cos(\hat{A})-\sin(\hat{A}))]$
$\times[360.\cos(\hat{A})+Y(\sin(\hat{A})-\cos(\hat{A}))]\div 2$

$=[360^2.\sin(\hat{A}).\cos(\hat{A})+360Y(\sin^2(\hat{A})-$
$\sin(\hat{A}).\cos(\hat{A})+\cos^2(\hat{A})-\sin(\hat{A}).\cos(\hat{A}))$
$-Y^2(\cos^2(\hat{A})-2.\sin(\hat{A}).\cos(\hat{A})+\sin^2(\hat{A})]\div 2$

Or $2.\sin(\hat{A}).\cos(\hat{A})=\sin(2\hat{A})$
et $\cos^2(\hat{A})+\sin^2(\hat{A})=1$.

Donc $\text{Aire}(ABCD)= 360^2.\sin(2\hat{A})\div 4 +360Y\div 2\times(1-\sin(2\hat{A}))-Y^2\div 2\times(1-\sin(2\hat{A}))$
$=180^2.\sin(2\hat{A})+180Y\times(1-\sin(2\hat{A}))-Y^2\div 2\times(1-\sin(2\hat{A}))$
$=180^2-180^2\times(1-\sin(2\hat{A}))+180Y\times(1-\sin(2\hat{A}))-Y^2\div 2\times(1-\sin(2\hat{A}))$
$=180^2-(1-\sin(2\hat{A}))(180^2-180Y+Y^2\div 2)$

En remplaçant Y par X, 360 par 450, et Â par Â' ,on obtient de même :
$\text{Aire}(ABCD)=225^2-(1-\sin(2\hat{A}'))(225^2-225X+X^2\div 2)$
$(1-\sin(2\hat{A}))$ est positif car un sinus est plus petit ou égal à 1.

Étudions la fonction $f(Y)=180^2-180Y+Y^2\div 2$. $f'(Y)=Y-180$.
Le minimum pour f est donc atteint pour $Y=180$ et vaut $180^2\div 2$ qui est positif.
Ainsi l'aire de ABCD est inférieur ou égal à 180^2 (et à 225^2 pour l'autre formule).
Elle est égale à 180^2 quand $(1-\sin(2\hat{A}))=0$ c'est à dire quand $\hat{A}=45°$.
On a alors AEB et CED qui sont des triangles rectangles et isocèles. Donc $a=b$ et $c=d$.
Les triangles AED et BEC sont donc égaux et $450-X=X$ d'où $X=225$.
On a donc $a^2+c^2=225^2$ (par Pythagore) et $(a+c)^2\div 2=180^2$ (Aire de ABCD)
$a+c=180\sqrt{2}$; $a^2+2ac+c^2=180^2\times 2$; $2ac=180^2\times 2-225^2$; $ac=180^2-225^2\div 2$.

Les nombres a et c sont donc solutions de l'équation $Z^2-180\sqrt{2}Z+180^2-225^2\div 2$.
$\Delta=\ 180^2\times 2-4\times 180^2+2\times 225^2=2\times(225^2-180^2)=2(225-180)(225+180)=2\times 45\times 405=2\times 45\times 45\times 9$.
$45\times 3=135$ donc $\Delta=\ (135\sqrt{2})^2$ Par conséquent
$a=(180\sqrt{2}-135\sqrt{2})\div 2=45\sqrt{2}\div 2$ et $c=(180\sqrt{2}+135\sqrt{2})\div 2=315\sqrt{2}\div 2$
Ainsi le côté le plus long est CD et il vaut $315\sqrt{2}\div 2\times\sqrt{2}=315$.

La longueur du plus grand côté est donc de **315 dam**.