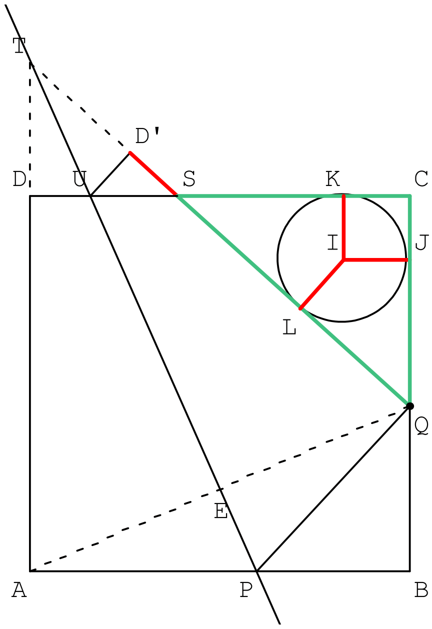
Temple de Mangan-ji de la préfecture de Fukushima au Japon.



On prend une feuille de papier carrée ABCD de côté 1 dm.
On plie la feuille de façon que le coin A se positionne en Q sur le côté opposé [BC], et que le bord replié de la feuille vienne couper [DC] au point S. On trace le cercle inscrit dans le triangle rectangle SCQ, il est donc tangent à la fois à ses trois côtés.
Le but de l'exercice est de comparer le rayon r de ce cercle et la mesure d du segment [D'S] du côté replié qui déborde à l'extérieur de la feuille.

Démonstration :

Posons $BQ=\frac{1}{k}$ avec k>1. $CQ=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$.

Le triangle ABQ étant rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AQ^2=AB^2+BQ^2=1+\frac{1}{k^2}=\frac{k^2+1}{k^2}$.

Donc $AQ=\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ et si E est le milieu de [AQ] $AE=\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}$.

Or, $\tan(\widehat{BAQ})=\frac{BQ}{AB}=\frac{EP}{AE}$ donc $EP=\frac{AE\times BQ}{AB}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}\times\frac{1}{k}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k^2}$.

Le triangle APE étant rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AP^2=AE^2+EP^2=\frac{k^2+1}{4k^2}+\frac{k^2+1}{4k^4}=\frac{(k^2+1)\times k^2}{4k^4}+\frac{k^2+1}{4k^4}=\frac{(k^2+1)(k^2+1)}{4k^4}=\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2)^2}.\quad \text{et}\quad AP=\frac{k^2+1}{2k^2}.$$

$$\tan(\widehat{ATP})=\tan(\widehat{BAQ})=\frac{BQ}{AB}=\frac{AP}{AT}\quad \text{donc}\quad AT=\frac{AP\times AB}{BQ}=\frac{k^2+1}{2k^2}\times k=\frac{k^2+1}{2k}.$$

$$DT=\frac{k^2+1}{2k}-1=\frac{k^2+1-2k}{2k}=\frac{(k-1)^2}{2k}=D'T.$$

(DT)//(CQ) donc d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{SD}{SC}=\frac{DT}{CQ}=\frac{(k-1)^2}{2k}\div\frac{k-1}{k}=\frac{k-1}{2}$.

Or, SD+SC=1 donc $\frac{k-1}{2}\times SC+1\times SC=1$; $\frac{k+1}{2}\times SC=1$; $SC=\frac{2}{k+1}$; $SD=\frac{k-1}{2}\times\frac{2}{k+1}=\frac{k-1}{k+1}$.

Le triangle STD étant rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$ST^2=SD^2+DT^2=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}+\frac{(k-1)^4}{4k^2}=\frac{(k-1)^2\times 4k^2}{(k+1)^2\times 4k^2}+\frac{(k-1)^2\times(k-1)^2\times(k+1)^2}{4k^2\times(k+1)^2}=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2\times 4k^2}\times(4k^2+(k^2-1)^2)$$

$$=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2\times 4k^2}\times(4k^2+k^4-2k^2+1)=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2\times 4k^2}\times(k^4+2k^2+1)=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2\times 4k^2}\times(k^2+1)^2=\frac{(k-1)^2\times(k^2+1)^2}{(k+1)^2\times(2k)^2}.$$

$$ST=\frac{(k-1)(k^2+1)}{(k+1)\times 2k}.$$

$$d=SD'=\frac{(k-1)(k^2+1)}{2k(k+1)}-\frac{(k-1)^2}{2k}=\frac{(k-1)}{2k}\times\left(\frac{(k^2+1)}{(k+1)}-(k-1)\right)=\frac{(k-1)}{2k(k+1)}\times((k^2+1)-(k^2-1))=\frac{(k-1)}{2k(k+1)}\times 2$$

$$d=\frac{k-1}{k(k+1)}.$$

Le rayon de l'angle inscrit vérifie $r=\frac{2\times Aire}{Périmètre}$. $Aire(QCS)=\frac{(k-1)}{k}\times\frac{2}{k+1}\div 2=\frac{k-1}{k(k+1)}$.

$$Périmètre(QCS)=\frac{(k-1)}{k}+\frac{2}{k+1}+\frac{1+k^2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+1)+2k+(1+k^2)}{k(k+1)}=\frac{k^2-1+2k+1+k^2}{k(k+1)}=\frac{2k^2+2k}{k(k+1)}=\frac{2k(k+1)}{k(k+1)}$$

$Périmètre(QCS)=2$. Le périmètre de QCS est donc constant, quel que soit k.

$$r=\frac{\frac{2\times(k-1)}{k(k+1)}}{2}=\frac{k-1}{k(k+1)}.$$

Par conséquent, quel que soit k, on a toujours r=d.