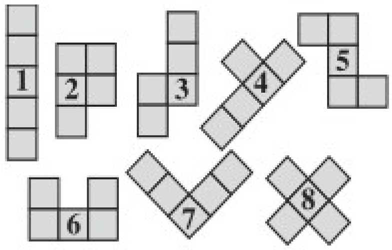
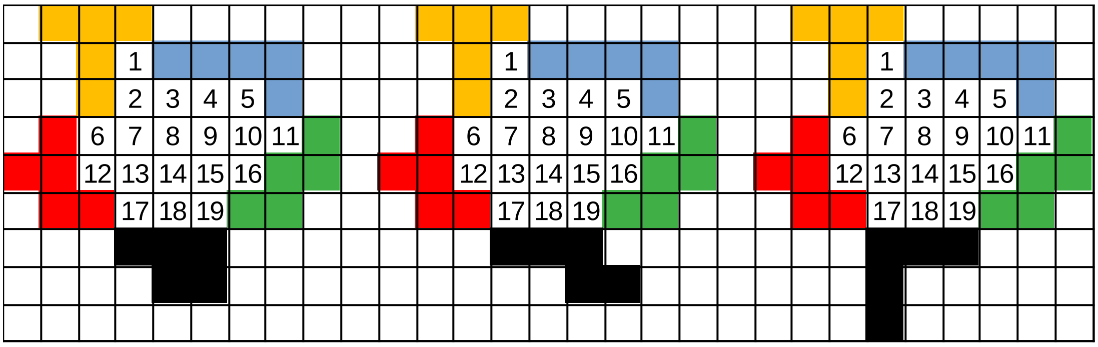
Solutions des quarts individuels 2022.

Énigme 1- L'enclos.

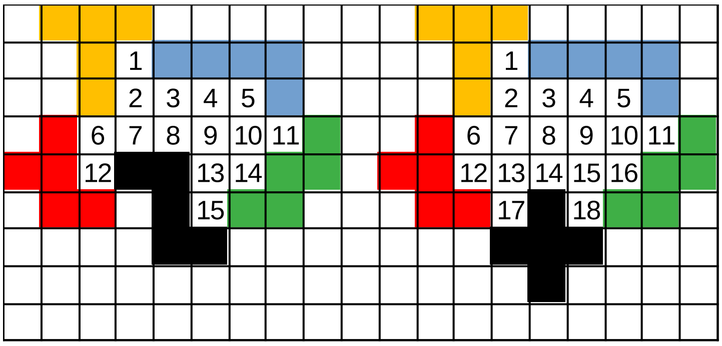


Les pièces 1 et 4 ne permettent pas de terminer l'enclos.

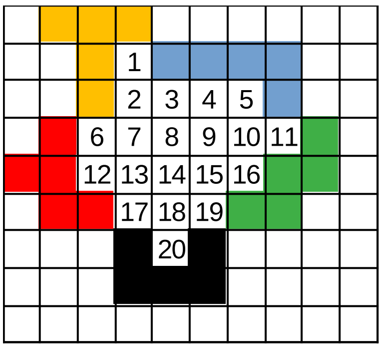
Les pièces 2, 3 et 7 permettent de terminer l'enclos par une ligne horizontale.



Les pièces 5 et 8 permettent de terminer l'enclos mais en allant au dessus de cette ligne horizontale.



La pièce 6 permet de terminer l'enclos en allant au dessous de cette ligne horizontale.



Il faut donc choisir la **pièce 6**.

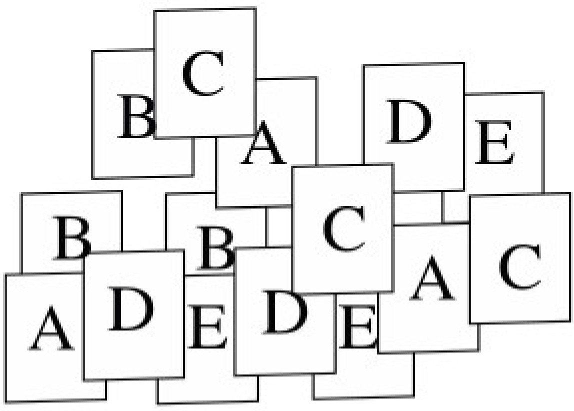
Énigme 2- La tirelire.

Pour payer 17 €, Mathilde peut prendre :

- 8 pièces de 2 € et 1 pièce de 1 € ;
- 7 pièces de 2 € et 3 pièces de 1 € ;
- 6 pièces de 2 € et 5 pièces de 1 € ;
- 5 pièces de 2 € et 7 pièces de 1 € ;
- 4 pièces de 2 € et 9 pièces de 1 € ;
- 3 pièces de 2 € et 11 pièces de 1 € ;
- 2 pièces de 2 € et 13 pièces de 1 € ;
- 1 pièce de 2 € et 15 pièces de 1 €.

Elle peut payer 17 € de **8 façons** différentes.

Énigme 3- Jeu de cartes.



Les cartes C sont au-dessus de toutes les autres. Elles viennent donc en premier.

On observe qu'une carte D est au-dessus d'une carte A, d'une carte E et de deux cartes B.

Les cartes D viennent donc en deuxième position.

Une carte A est au-dessus d'une carte B et une autre carte A est au-dessus d'une carte E.

Les cartes A viennent donc en troisième position.

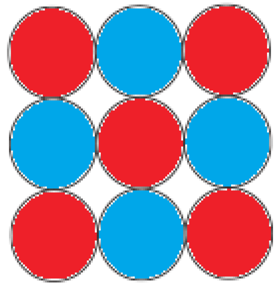
Une carte E est au-dessus d'une carte B. Les cartes E viennent donc en quatrième position.

Enfin les cartes B viennent en cinquième position.

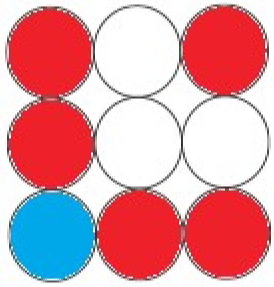
L'ordre est donc le suivant : **C,D,A,E,B**.

Énigme 4- Les gommettes.

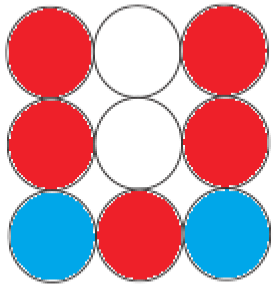
Si les quatre coins sont rouges alors le cinquième rouge doit être au centre pour éviter que des gommettes bleues ne se touchent.



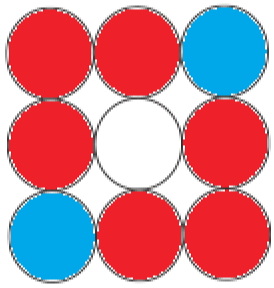
Si trois coins sont rouges et un coin est bleu, alors les deux cases à côté du bleu sont rouges. Or les trois gommettes restantes sont bleues et se toucheront.



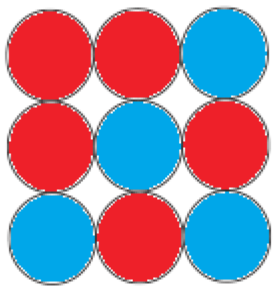
Si deux coins consécutifs sont rouges et les deux autres bleus, alors les cases à côté des bleus sont rouges. Or les deux gommettes restantes sont bleues et se toucheront.



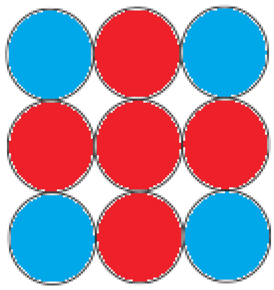
Si deux coins opposés sont rouges et les deux autres bleus, alors les cases à côté des bleus sont rouges mais il faudrait 6 gommettes rouges.



Si un coin est rouge et les trois autres bleus, alors les cases à côté des bleus sont rouges et la case centrale est bleu. Mais alors deux gommettes rouges ne touchent aucune autre gommette rouge.



Si les 4 coins sont bleus, les gommettes rouges se placent sur les autres cases et la figure respecte les consignes. On a alors 4 gommettes rouges qui touchent deux gommettes bleues et une gommette rouge qui ne touche aucune gommette bleue.

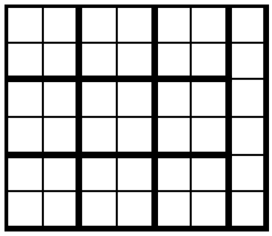


La réponse est donc : **1**.

Énigme 5- La grille.

Dans un carré de 2 sur 2, on ne peut colorier qu'une case au maximum.

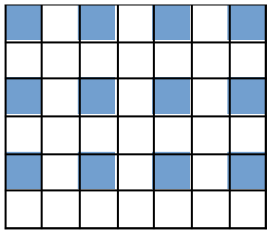
On peut partager notre grille en 9 carrés de 2 sur 2 et un rectangle de 1 sur 6.



Dans le rectangle de 1 sur 6, on ne peut colorier que 3 cases au maximum (une sur deux).

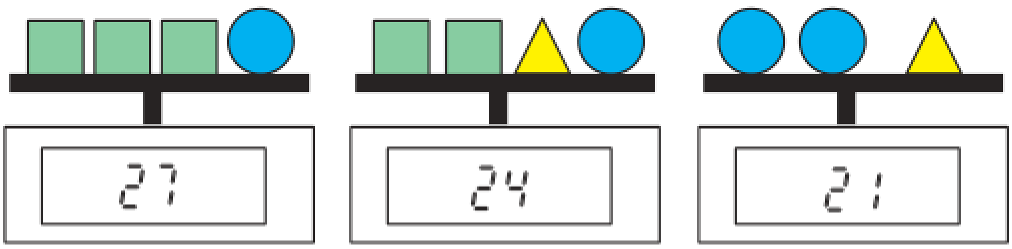
Par conséquent on ne peut colorier que 9+3=12 cases au maximum.

Vérifions que c'est possible :



On peut colorier au maximum **12 cases**.

Énigme 6- Les pierres de Joe.



Les balances 1 et 2 nous apprennent que, si on remplace un triangle par un carré, on gagne 27-24=3g.

Les balances 2 et 3 nous apprennent que, si on remplace un disque par deux carrés, on gagne 24-21=3g.

Remplaçons le disque de la balance n°1 par deux carrés alors on gagne 3g. 27+3=30 g pour 5 carrés.

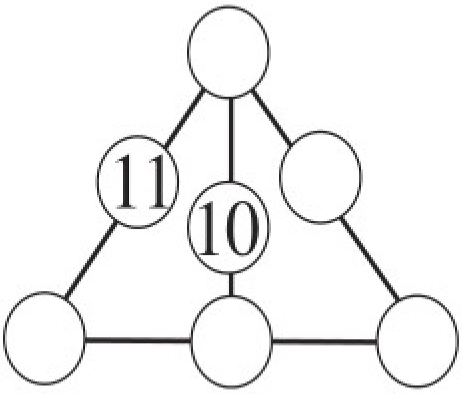
Or 5×6=30 donc **chaque carré pèse 6g**.

6-3=3 donc **chaque triangle pèse 3g**.

(2×6)-3=12-3=9 donc **chaque disque pèse 9g**.

Nous pouvons vérifier nos calculs:6+6+6+9=27 ; 6+6+3+9=24 et 9+9+3=21.

Énigme 7- Le triangle de l'année.



Le nombre 9 n'est pas à côté du 11 car sinon 9+11=20 et 22-20=2 il faudrait un 2 pour compléter.

Le nombre 9 n'est pas à côté du 10 car sinon 9+10=19 et 22-19=3 il faudrait un 3 pour compléter.

Le nombre 8 n'est pas à côté du 11 car sinon 8+11=19 et 22-19=3 il faudrait un 3 pour compléter.

Le nombre 8 n'est pas à côté du 10 car sinon 8+10=18 et 22-18=4 il faudrait un 4 pour compléter.

Par conséquent les nombres 8 et 9 sont sur la ligne oblique de droite mais pas en haut.

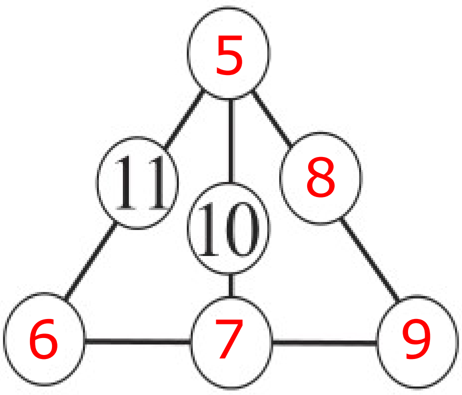
8+9=17 et 22-17=5. Le nombre 5 est en haut.

5+11=16 et 22-16=6. Le nombre 6 est en bas à gauche.

5+10=15 et 22-15=7. Le nombre 7 est en bas au centre.

6+7=13 et 22-13=9. Le nombre 9 est en bas à droite.

Enfin le nombre 8 est sur la ligne oblique de droite au centre.



Énigme 8- Le cadenas.

A est le double de B donc les possibilités sont :

A	0	2	4	6	8
B	0	1	2	3	4
C=13-B	13	12	11	10	9

Comme C est un chiffre, la seule possibilité est que A=8, B=4 et C=9.

A+B=8+4=12 et 12-9=3. Donc D=3.

Le code du cadenas est donc : **8493**.

Énigme 9- Nombre et carré retournables.

Cherchons tous les nombres plus petits que 2022 et dont la somme des chiffres vaut 6.

nombre	retourné	carré	carré du retourné
2022	2202	4088484	4848804
2013	3102	4052169	9622404
2004	4002	4016016	16016004
1500	51	2250000	2601
1410	141	1988100	19881
1401	1041	1962801	1083681
1320	231	1742400	53361
1311	1131	1718721	1279161
1302	2031	1695204	4124961
1230	321	1512900	103041
1221	1221	égal au retourné	
1212	2121	1468944	4498641
1203	3021	1447209	9126441
1140	411	1299600	168921
1131	1311	déjà testé	
1122	2211	1258884	4888521
1113	3111	1238769	9678321
1104	4011	1218816	16088121
1050	501	1102500	251001
1041	1401	déjà testé	
1032	2301	1065024	5294601
1023	3201	1046529	10246401
1014	4101	1028196	16818201
1005	5001	1010025	25010001
600	6	360000	36
510	15	260100	225
501	105	251001	11025
420	24	176400	576
411	114	168921	12996
402	204	161604	41616
330	33	108900	1089
321	123	103041	15129
312	213	97344	45369
303	303	égal au retourné	
240	42	57600	1764
231	132	53361	17424
222	222	égal au retourné	
213	312	déjà testé	
204	402	déjà testé	
150	51	22500	2601
141	141	égal au retourné	
132	231	déjà testé	
123	321	déjà testé	
114	411	déjà testé	
105	501	déjà testé	
60	6	3600	36
51	15	2601	225
42	24	1764	576
33	33	égal au retourné	
24	42	déjà testé	
15	51	déjà testé	
6	6	égal au retourné	

Nous avons donc **3 solutions** : **1212 ; 1122 et 1113**.

Énigme 10- Deux additions et un café.

b=6.

a≠é donc la retenue pour les dizaines est au moins de 1.

6+c+d≤6+5+4=15 donc la retenue est au maximum de 1. Elle est donc de 1.

é=a+1.

De même pour l'autre addition on obtient c=f+1.

	a	6
+		(f+1)
+		d
=	(a+1)	f

	f	(a+1)
+		6
+		d
=	(f+1)	a

On a alors 6+(f+1)+d=10+f donc d=3.

Et (a+1)+6+3=10+a ce qui est vrai quel que soit a.

Regardons les valeurs possibles, il reste 1,2,4 et 5.

- Si a=1 alors é=2 ; f=4 et c=5. Cela fonctionne café=5142.
- Si a=4 alors é=5 ; f=1 et c=2. Cela fonctionne café=2415.

Il y a donc **2 solutions** : café=**5142** et café=**2415**.

Énigme 11- La loterie.

Considérons d'abord les nombres écrits avec 3 chiffres différents : ABC.

Les permutations possibles sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, c'est à dire 6 possibilités.

Si on choisit A=0 et B=2, il nous reste pour C les valeurs 1,3,4,6,7,8,9, c'est à dire 7 choix.

Avec les permutations cela donne 6×7=42 possibilités.

Si on choisit A=0 et B=5, il nous reste pour C les valeurs 1,3,4,6,7,8,9, c'est à dire 7 choix.

Avec les permutations cela donne 6×7=42 possibilités.

Si on choisit A=2 et B=5, il nous reste pour C les valeurs 1,3,4,6,7,8,9, c'est à dire 7 choix.

Avec les permutations cela donne 6×7=42 possibilités.

Considérons maintenant les nombres écrits avec 3 chiffres dont deux sont identiques : ABB.

Les permutations possibles sont ABB, BAB, BBA, c'est à dire 3 possibilités.

Si on choisit A=0, il nous reste pour B les valeurs 2 et 5, c'est à dire 2 choix.

Avec les permutations cela donne 3×2=6 possibilités.

Si on choisit A=2, il nous reste pour B les valeurs 0 et 5, c'est à dire 2 choix.

Avec les permutations cela donne 3×2=6 possibilités.

Si on choisit A=5, il nous reste pour B les valeurs 0 et 2, c'est à dire 2 choix.

Avec les permutations cela donne 3×2=6 possibilités.

Au total nous avons 42×3+6×3=126+18=144.

144 numéros auront un lot de consolation.

Énigme 12- Que d'élastiques !

Périmètre en cm	12	20	25
Nombre d'élastiques	n	p	q
Poids d'un élastique	x	y	z

Les poids des élastiques sont proportionnels à leurs longueurs, donc $\frac{x}{12}=\frac{y}{20}=\frac{z}{25}$.

Par conséquent $y=\frac{20}{12}\times x$ et $z=\frac{25}{12}\times x$.

Il y a le même poids de chaque sorte d'élastiques, donc nx=py=qz=81÷3=27 g.

$nx=p\times\frac{20}{12}\times x=q\times\frac{25}{12}\times x$. donc 12n=20p=25q.

25q est un multiple de 25, alors 12n aussi et par conséquent n aussi.

n=25 ou n=50 ou n=75, etc.

Or x>0,3 donc nx>0,3n donc 27>0,3n d'où 90>n.

n=25 ou n=50 ou n=75.

De plus z<1 donc qz<q donc 27<q.

Si n=25 alors q=12×25÷25=12 ce qui n'est pas supérieur à 27.

Si n=50 alors q=12×50÷25=12×2=24 ce qui n'est pas supérieur à 27.

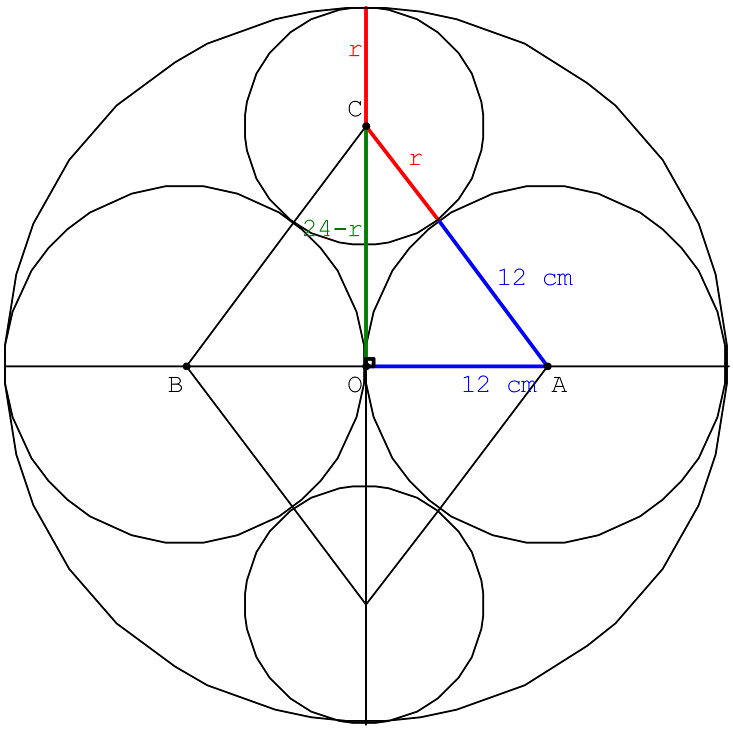
Si n=75 alors q=12×75÷25=12×3=36 qui est supérieur à 27.

Dans ce cas p=12×75÷20=(12÷4)×(75÷5)=3×15=45.

On a bien 75+36+45=156 qui est supérieur à 100.

Il y a donc **1 solution** : il y a **75 élastiques** de 12 cm de périmètre.

Énigme 13- Les tuyaux.



Le conduit fait 24 cm de rayon.

24÷2=12.

Le rayon des gros tuyaux est de 12 cm.

Si on appelle r le rayon du petit tuyau.

Le triangle OAC est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore on a :

AC²=OA²+OC²

(r+12)²=12²+(24-r)²

r²+24r+12²=12²+24²-48r+r² (en développant)

24r+48r=24² (en simplifiant par r² et par 12²)

r+2r=24 (en divisant par 24)

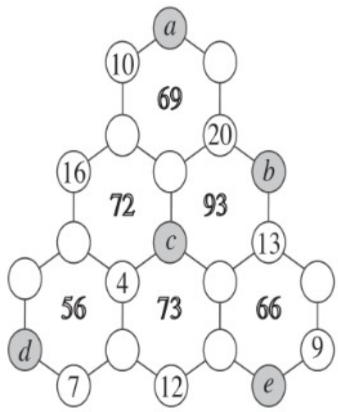
3r=24

r=8 cm.

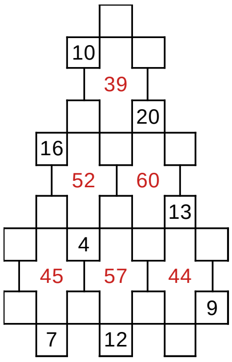
8×2=16.

Le diamètre des petits tuyaux fait donc **16 cm**.

Énigme 14- Quatorze nombres effacés.



Enlevons les nombres déjà placés aux sommes, on obtient :

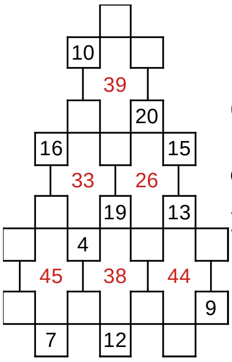


Si on fait la somme 39+45+44=128, on obtient la somme de 12 nombres parmi ceux restants (il reste b et c).

Or 1+2+3+5+6+8+11+14+15+17+18+19+21+22=162.

Donc b+c=162-128=34.

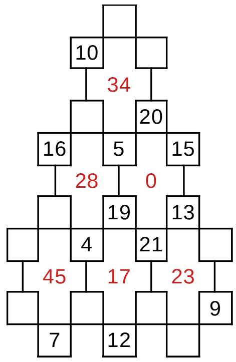
La seule possibilité est 34=19+15. Or 19 ne peut pas être à côté du 20 donc c=19 et b=15.



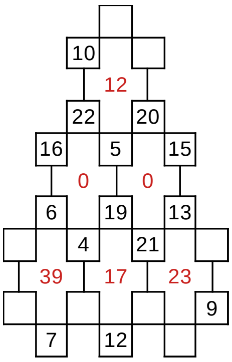
Pour les deux autres nombres de cet hexagone il reste :

60-34=26 et 26=21+5 ou 26=18+8. Or 19 est à côté des deux nombres : cela ne peut pas être 18. De plus 21 ne peut pas être à côté de 20. On a donc :

Il reste :
1,2,3,6,8,11,14,17,18,22.

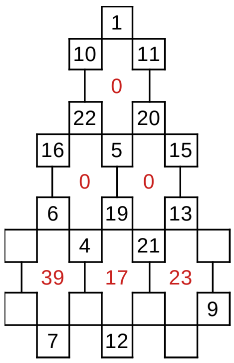


On a 28=22+6=17+11. Or 16 est à côté des deux nombres : cela ne peut pas être 17. De plus 6 ne peut pas être à côté de 5. On a donc :

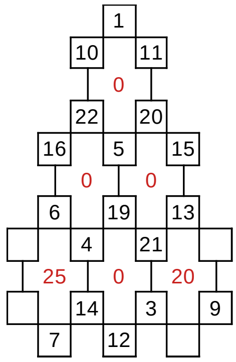


On a 12=11+1 et 11 n'est pas à côté du 10 donc on obtient :

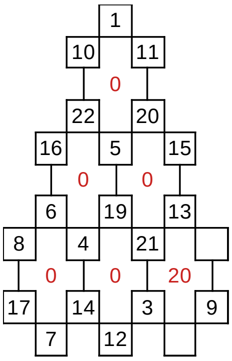
Il reste 2,3,8,14,17,18.



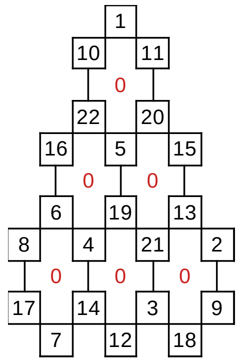
17=14+3. Comme le 3 n'est pas à côté du 4 on obtient :



25=17+8. Comme le 8 n'est pas à côté du 7 on a :



Enfin 20=18+2. Comme le 2 n'est pas à côté du 3 on obtient :



Il y a donc **1 solution** : **a=1, b=15, c=19, d=17, e=18.**

Énigme 15- L'âge de Dominique.

Écrivons les 25 nombres premiers inférieurs à 100 d'une part, et la somme de tous les nombres premiers inférieurs strictement à ces nombres d'autre part :

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

0	2	5	10	17
28	41	58	77	100
129	160	197	238	281
328	381	440	501	568
639	712	791	874	963

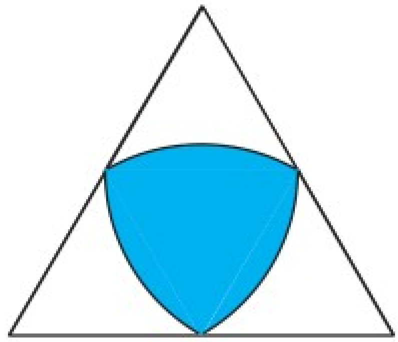
On a 0 divisible par 2,

5 divisible par 5, et 568 divisible par 71.

De plus 2, 5 et 17 sont des nombres premiers.

On a donc **3 solutions** : **2; 5 et 71**.

Énigme 16- Il est généreux, Laux !



La hauteur H d'un triangle équilatéral de côté C vaut $C\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En effet d'après le théorème de Pythagore, appliqué au demi-triangle équilatéral :

$$H^2=C^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2=C^2-\frac{C^2}{4}=C^2\times\frac{3}{2^2}$$

Par conséquent l'aire d'un triangle équilatéral de côté C vaut $C^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'aire du triangle de côté 100 vaut donc $50^2\sqrt{3}$ et celle de côté 50 vaut $25^2\sqrt{3}$.

L'aire d'un disque de rayon 50 vaut $50^2\pi$ donc celle d'un sixième de ce disque vaut $50^2\frac{\pi}{6}$.

Pour avoir l'aire d'une calotte bleue, il faut enlever le triangle de côté 50. On obtient : $50^2\frac{\pi}{6}-25^2\sqrt{3}$.

L'aire d'une pointe correspond à l'aire du triangle de côté 50 auquel on enlève cette calotte soit :

$$25^2\sqrt{3}-\left(50^2\frac{\pi}{6}-25^2\sqrt{3}\right)=2\times25^2\sqrt{3}-50^2\frac{\pi}{6}\approx1250\times1{,}732-2500\times\frac{3{,}1416}{6}$$
$$=2165-2500\times0{,}5236=2165-1309=856.$$

Chaque enfant recevra **856 m²**.

Énigme 17- Perdu dans la forêt.

Appelons (d) la médiatrice de [AB]. Imaginons que le point M (minimal) ne soit pas sur (d) et appelons M' son symétrique par rapport à la droite (d). On a alors EM=EM', AM=BM' et BM=AM' par symétrie.

Donc AM+BM+EM=AM'+BM'+EM' donc M' vérifie aussi les conditions de minimum.

AM+BM=AM'+BM' donc M et M' sont sur une ellipse de foyers A et B.

Appelons maintenant I le milieu de [MM'] qui est situé sur (d). Il est à l'intérieur de l'ellipse donc AI+BI<AM+BM. De plus le triangle EMI étant rectangle en I on a EI<EM.

Donc AI+BI+EI<AM+BM+EM. Le point M n'est donc pas au minimum s'il n'est pas sur (d).

Le point M recherché est donc sur (d).

Appelons y la distance en km de M par rapport à (AB)

On a AM²=1+y², BM²=1+y² et EM=2-y.

Appelons $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$. Cherchons son minimum. Il est atteint quand sa dérivée s'annule.

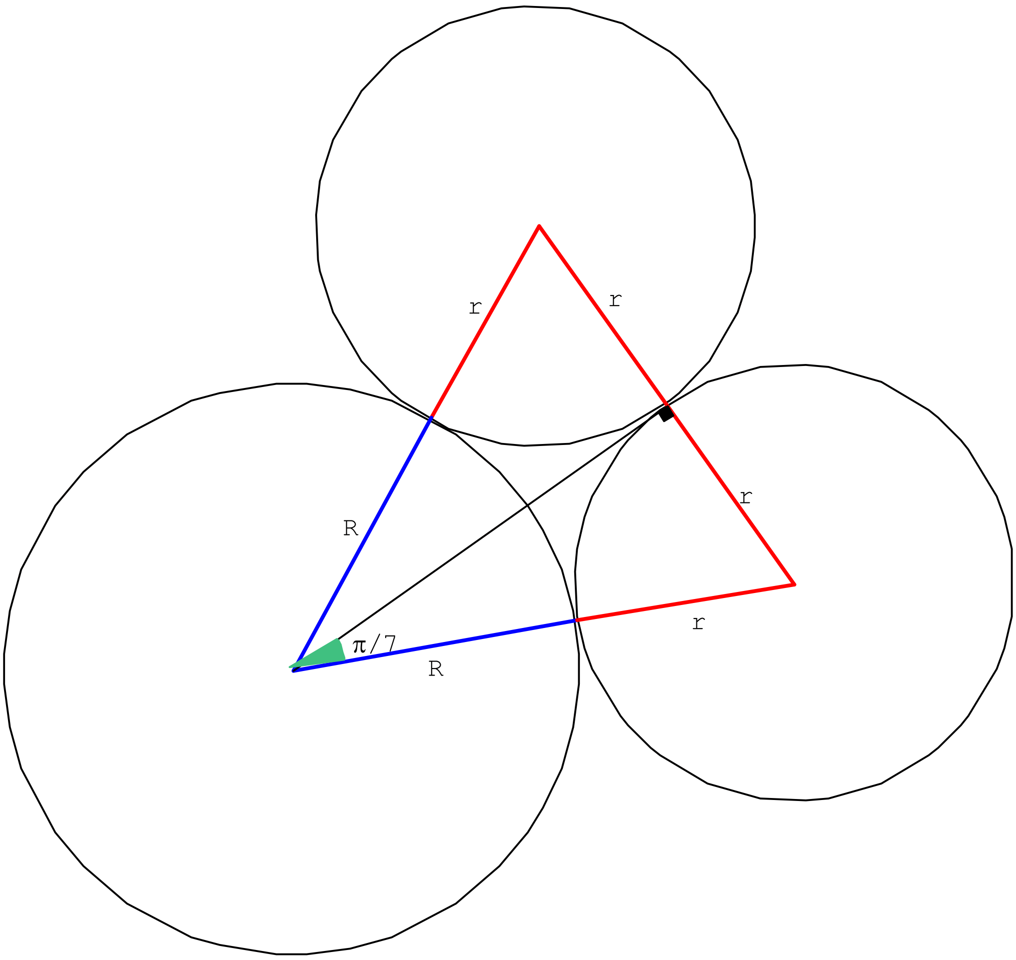
$$f'(y)=\frac{2\times1}{2}\times\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$$ Cette fonction s'annule quand :

$$2y=\sqrt{1+y^2}\text{ soit }4y^2=1+y^2\text{ soit }3y^2=1\text{ soit }y^2=\frac{1}{3}\text{ soit }y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{1+\frac{1}{3}}+2-\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}+2-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}+2-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}+2=\sqrt{3}+2\approx3{,}732.$$

La distance minimum est donc d'environ 3,732 km soit **3 732 m**.

Énigme 18- La rosace de Papy Francis.



On a $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\frac{r}{R+r}$ donc $(R+r)\times\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=r$ et $R\times\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=r\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

1-0,433 884=0,566 116. donc $\frac{R}{r}\approx\frac{566\ 116}{433\ 884}\approx 1{,}304\ 763$

r>100 donc R>130,4767 et R<200 donc r<153,2845 d'où 100<r<153 et 130<R<200.

Procédons par fractions continues :

$$\frac{566\ 116}{433\ 884}=\frac{283\ 058}{216\ 942}=\frac{141\ 529}{108\ 471}=1+\frac{33\ 058}{108\ 471}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{9\ 297}{33\ 058}}$$

En continuant ainsi, on obtient :

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{56+\cfrac{11}{18}}}}}}}}\approx 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}}=\frac{137}{105}$$

donc r=105 et R≈137,000 3

2×105=210>200 donc il n'y a pas d'autres valeurs possibles.

Il y a **1 solution** : **R≈137 mm**.